

Föreläsning 2: Räknelagar för sannolikheter

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
Mars 20, 2014



Beskrivande statistik

När man ska analysera en datamängd är det en bra idé att först illustrera den grafiskt.

Frekvenstabell: För diskret data, visar hur många observationer vi har för varje möjligt utfall.

Stolpdiagram: Visualiserar en frekvenstabell genom att till varje värde rita en stapel vars höjd är proportionell mot antalet observationer för detta värde.

Sekvensdiagram: Ritar upp observationerna i en följd. Används för att studera trender i värden.

Histogram: För kontinuerlig data.

- Dela in datan i ett antal intervall och räknar antalet observationer i varje intervall.
- Rita ett stolpdiagram där höjden är proportionell mot antalet i klassen och bredden är den samma som intervallbredden för den klassen.

Numerisk beskrivning av data

Medelvärde: Medelvärdet (stickprovsmedelvärdet) av en datamängd $x_1, \dots, x_n$ ges av

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Median: Medianen av en datamängd $x_1, \dots, x_n$ ges av det mittersta värdet efter att man har sorterat värdena.

Varsians: Variansen av en datamängd $x_1, \dots, x_n$ ges av

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)$$

Variansen kan också beräknas som

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} (x_1^2 + \dots + x_n^2 - n\bar{x}^2)$$

Standardavvikelse: ges av $\sqrt{s^2}$, dvs kvadratroten av variansen.

Utfall och utfallsrum

slumpmässigt försök

Man brukar säga att ett slumpmässigt försök är ett försök som kan upprepas under väsentligen identiska förhållanden där utfallet av försöket inte exakt kan förutsägas i det enskilda fallet.

Utfall och utfallsrum

Resultatet av ett försök kallas för ett *utfall* ω , och mängden av alla möjliga utfall kallas för *utfallsrummet* Ω .

Händelser

Man kan också sätta samman olika utfall till *händelser*. En händelse A är en mängd av utfall, det vill säga en delmängd av utfallsrummet Ω .

Snitt, union och komplement

Låt A och B vara två händelser, vi definierar

Komplement, A^c

Mängden av alla utfall som inte finns i A . $A^c = \Omega \setminus A$.

Union, $A \cup B$

Mängden av alla utfall i A eller B .

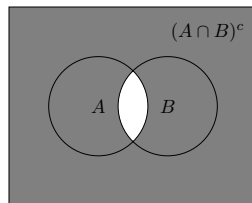
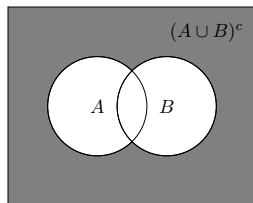
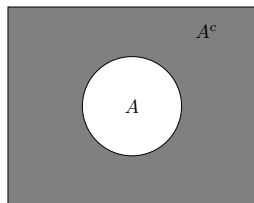
Snitt $A \cap B$

Mängden av alla utfall som finns i A och B .

Den tomma mängden $\emptyset$

Brukar kallas för en omöjlig händelse. Om $A \cap B = \emptyset$ så säger vi att A och B är oförenliga, disjunkta, eller utesluter varandra.

Venn diagram



Kolmogorovs axiomsystem

Kolmogorovs axiomsystem

Låt Ω vara ett utfallsrum. En sannolikhet, eller sannolikhetsmått $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är en reell funktion som tar händelser i Ω som argument och returnerar ett reellt tal, och som uppfyller

- 1 $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 2 $P(\Omega) = 1$.
- 3 Om $A_1, A_2, \dots$ är en följd av disjunkta händelser så gäller att

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Speciellt så gäller att om händelserna A och B är disjunkta så är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Egenskaper hos sannolikhetsmåttet

Ur axiomen kan vi härleda följande egenskaper.

Egenskaper

För ett sannolikhetsmått P gäller att

- 1 $P(\emptyset) = 0$.
- 2 $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Att dessa är uppfyllda inses enkelt genom att rita Venndiagram!