1. Låt $A = \{\text{Äpplet är maskätet}\}$ och $B = \{\text{Äpplet har skorv}\}$. Vi har då $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$. Den sökta sannolikheten ges av

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A^c \cap B^c) &= \mathsf{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathsf{P}(A \cup B) = 1 - (\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)) \\ &= 1 - (0.3 + 0.4 - 0.24) = 0.54.\end{aligned}$$

2. (a) Låt $A = \{\text{Kraftverk 1 fungerar}\}$ och $A = \{\text{Kraftverk 2 fungerar}\}$. Vi har då $\mathsf{P}(A) = 0.98$ och $\mathsf{P}(B) = 0.90$. Detta ger att

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\text{precis ett kraftverk fungerar}) &= \mathsf{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathsf{P}(A \cap B^c) + \mathsf{P}(A^c \cap B) \\ &= \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) + (1 - \mathsf{P}(A))\mathsf{P}(B) \\ &= 0.98 \cdot 0.10 + 0.02 \cdot 0.90 = 0.116.\end{aligned}$$

(b) Låt X beteckna den totala effekten. Vi har då

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X = 0) &= \mathsf{P}(A^c \cap B^c) = 0.02 \cdot 0.1 = 0.002, \\ \mathsf{P}(X = 50) &= \mathsf{P}(A \cap B^c) = 0.98 \cdot 0.1 = 0.098, \\ \mathsf{P}(X = 200) &= \mathsf{P}(A^c \cap B) = 0.02 \cdot 0.9 = 0.018, \\ \mathsf{P}(X = 250) &= \mathsf{P}(A^c \cap B^c) = 0.98 \cdot 0.90 = 0.882.\end{aligned}$$

Väntevärdet blir $\mathsf{E}(X) = \sum_x x \cdot \mathsf{P}(X = x) = 0 \cdot 0.002 + 50 \cdot 0.098 + 200 \cdot 0.018 + 250 \cdot 0.882 = 229kW$.

3. (a) En stokastisk variabel X sägs vara binomialfördelad $Bin(n, p)$ om den anger antalet lyckade försök av totalt n oberoende bernoulliförsök. Om vi ser händelsen att en beta skadas som ett lyckat försök, samt antar att betorna skadas oberoende av varandra, är antalet skadade betor binomialfördelat, $Bin(150, p)$.

(b) $p^* = X/150$, det vill säga andelen skadade betor, är en lämplig skattare. Det observerade värdet är alltså $12/150$.

(c) Skattarens väntevärde och varians ges av

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(p^*) &= \mathsf{E}(X/150) = \mathsf{E}(X)/150 = 150 \cdot p/150 = p, \\ \mathsf{V}(p^*) &= \mathsf{V}(X/150) = \mathsf{V}(X)/150^2 = 150 \cdot p \cdot (1 - p)/150^2 = p \cdot (1 - p)/150.\end{aligned}$$

(d) Eftersom $150p^*(1 - p^*) > 10$ är normalapproximation lämplig och ett konfidensintervall ges därför av

$$I_p = \left[p^* \pm z_{0.025}\sqrt{p^* \cdot (1 - p^*)/150}\right] = [0.037,\ 0.123]$$

(e) En skattning av p för den andra maskinen ges av $p_2^* = 18/200$ och skillnaden skattas som $18/200 - 12/150 = 0.01$. Eftersom även $200 \cdot p_2^* \cdot (1 - p_2^*) > 10$ kan vi normalapproximera även här och får därför intervallet som

$$I_{p_2 - p} = \left[p_2^* - p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_2^*(1 - p_2^*)}{200} + \frac{p^*(1 - p^*)}{150}}\right] = [-0.049,\ 0.069].$$

Eftersom intervallet täcker noll finns det ingen anledning att tro att maskinerna skiljer sig åt.

4. (a) Låt $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ beteckna mätningarna uppströms och låt $Y_i \sim N(\mu_i + \Delta, \sigma^2)$ beteckna mätningarna nedströms. Bilda differensen $Z_i = Y_i - X_i \sim N(\Delta, \sigma_\Delta^2)$, vi får då följande observationer av Z_i:

Observation i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0.03	0.14	-0.09	0.12	-0.11	0.08	-0.01

En skattning av Δ ges nu av $\bar{z} = 0.0229$.

(b) Vi börjar med att beräkna stickprovsvariansen för z: $s_\Delta^2 = \frac{1}{6}\sum_i (z_i - \bar{z})^2 = 0.0097$. Ett konfidensintervall för Δ ges nu av

$$I_\Delta = [\bar{z} \pm t_{0.025}(6)s/\sqrt{7}] = [-0.068,\ 0.114]$$

Eftersom intervallet täcker noll verkar industriavloppet inte påverka pH-nivån i floden.

5. (a) Vi har $S_{xx} = 756.4$, $S_{xy} = 4.188$ och $S_{yy} = 0.0324$. Detta ger $\beta_1^* = S_{xy}/S_{xx} = 0.0055$, $\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x} = 0.3439$, och $s = \sigma^* = \sqrt{(S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx})/8} = 0.0339$.

(b) Konfidensintervallet ges av

$$I_{\beta_1} = \left[\beta_1^* \pm t_{\alpha/2}(8)\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}\right] = [0.0055 \pm 2.306 \cdot 0.0012] = [0.0027,\ 0.0084]$$

(c) Det förväntade värdet ges av $\mu_Y(80) = \beta_0^* + 80\beta_1^* = 0.7869$. Konfidensintervallet ges av

$$I_{\mu_Y(80)} = \left(\beta_0^* + 80\beta_1^* \pm t_{\alpha/2}(8)s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(80-\bar{x})^2}{S_{xx}}}\right) = [0.7618,\ 0.8120]$$

6. (a) Vi har $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$, och alltså $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{V}(X) + \mathsf{E}(X)^2 = 2a(1-\pi/4) + a\pi/2 = 2a$.

(b) Vi har

$$\mathsf{E}(a^*) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i^2) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2a = a$$

$$\mathsf{V}(a^*) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{V}(X_i^2) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} 4a^2 = \frac{a^2}{n}$$

Eftersom $\mathsf{E}(a^*) = a$ är ML-skattaren väntevärdesriktig.

(c) Eftersom $\mathsf{V}(a^*) = a^2/n$ är skattarens standardfel $a^*/\sqrt{n}$. Via normalapproximation får vi då ett approximativt konfidensintervall som

$$I_a = [a^* \pm z_{\alpha/2}\frac{a^*}{\sqrt{n}}] = [186 \pm 1.96 \cdot \frac{186}{\sqrt{100}}] = [149.54,\ 222.45]$$