1. (a) (A) - (i): De visar båda symmetriska fördelningar centrerade kring -1.
   (B) - (iii): De visar båda fördelningar med $P(X < 0) = 0$.
   (C) - (ii): De visar båda diskreta fördelningar.

   (b) Eftersom funktionen antar värdet 0.7 i noll så är $P(X > 0) = 1 - 0.7 = 0.3$.

2. (a) Låt X_i vara vikten på potatis i och låt $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ vara den totala vikten. Vi har $Y \sim N(10 \cdot 90, 10 \cdot 20^2)$ och får

$$\mathsf{P}(Y \geq 1000) = 1 - \mathsf{P}(Y < 1000) = 1 - \Phi(\frac{1000 - 900}{\sqrt{10 \cdot 20^2}}) = 1 - \Phi(1.58) = 0.057.$$

   (b) Låt $Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Vi söker k så att

$$\mathsf{P}(Y_k \geq 1000) = 1 - \mathsf{P}(Y_k < 1000) = 1 - \Phi(\frac{1000 - 90 \cdot k}{\sqrt{k \cdot 20^2}}) = 0.9 \Rightarrow \frac{1000 - 90 \cdot k}{\sqrt{k \cdot 20^2}} = \Phi^{-1}(0.1).$$

   Enligt tabell har vi $\Phi^{-1}(0.1) = -1.28$, och har alltså $\frac{1000-90 \cdot k}{\sqrt{k \cdot 20^2}} = -1.28$. k ges därför av lösningen till ekvationen $90k - 1.28 \cdot 20\sqrt{k} - 1000 = 0$. Löser vi denna ekvation får vi att $k = 12.10$, och vi behöver alltså ta minst 13 potatisar för att nå den önskade sannolikheten.

3. (a) Låt X_i och Y_i vara observationerna för de två patientgrupperna. Modell vi ansätter är att alla observationer är oberoende och $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_A, \sigma^2)$, $Y_i \sim \mathsf{N}(\mu_B, \sigma^2)$. Skattningen av skillnaden ges av $\bar{x} - \bar{y} = 55.375 - 63.167 = -7.79$.

   (b) Vi testar hypotesen $H_0 : \mu_A = \mu_B$ mot $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ på nivå $\alpha = 0.05$ genom att beräkna konfidensintervallet

$$I_{\mu_A - \mu_B} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

   Den poolade variansskattningen ges av $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = 88.89236$, och vi får $I_{\mu_A - \mu_B} = (-18.89, 3.30)$. Eftersom intervallet täcker noll kan vi inte förkasta H_0.

4. (a) Fördelen med stickprov i par är att den individuella variationen i verkningstid hos patienterna inte påverkar testets styrka.

   (b) Låt X_i vara observationen av verkningstiden av bedövningsmedel A hos patient i och låt Y_i vara motsvarande verkningstid för bedövningsmedel B. Vi bildar differenserna $Z_i = X_i - Y_i$ och ansätter modellen $Z_i \sim \mathsf{N}(\Delta, \sigma^2)$ där vi antar att alla Z_i är oberoende. Skattningen av skillnad i verkningsgrad ges nu av $\bar{z} = -4.375$.

   (c) Vi testar hypotesen $H_0 : \Delta = 0$ mot $H_1 : \Delta \neq 0$ på nivå $\alpha = 0.05$ genom att beräkna konfidensintervallet

$$I_\Delta = \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n_1 - 1) \frac{s}{\sqrt{n_1}} \right) = \left(-4.375 \pm t_{\alpha/2}(7) \frac{1.505941}{\sqrt{8}} \right) = (-5.63, -3.12)$$

   Eftersom intervallet inte täcker noll kan vi förkasta H_0.

5. (a) Låt X vara antal döda pixlar på en skärm; $X \sim Po(3)$. $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0.0498$.

   (b) Låt X_i vara antal döda pixlar på skärm nr i; $X_i \sim Po(3)$. Låt $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$, vi har då $\mathsf{E}(Y) = \sum_{i=1}^{10} \mathsf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{10} 3 = 30$.

(c) Vi söker $\mathsf{P}(Y \leq 40)$. $Y \sim Po(30)$ men enligt CGS är Y approximativt $\mathsf{N}(30, 30)$-fördelad, så vi har $\mathsf{P}(Y \leq 40) \approx \Phi(\frac{40-30}{\sqrt{30}}) = \Phi(1.82) = 0.966$.

(d) Låt ξ vara den totala kostnaden. Vi har $\xi = 200$ med sannolikhet 0.966 och $\xi = 500$ med sannolikhet $1 - 0.966$ och alltså är ξ en diskret variabel med $\mathsf{P}(\xi = 200) = 0.966$ och $\mathsf{P}(\xi = 500) = 1 - 0.966$. Vi har därför $\mathsf{E}(\xi) = 0.966 \cdot 200 + (1 - 0.966) \cdot 500 = 210.2$kr.

6. (a) $f(x)$ är alltid icke-negativ om $c > 0$ och vi vill hitta värdet på c som gör att $\int f(x)dx = 1$. Vi har

$$\int cf(x)dx = \left[-\lambda \exp\left(-\frac{x^3}{3\lambda}\right)\right]_0^\infty = \lambda$$

och alltså ska vi välja $c = \lambda$.

(b) Log-likelihooden ges av

$$L(\mathbf{x}; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(2 \log x_i - \log \lambda - \frac{x_i^3}{3\lambda}\right) = 2 \sum_{i=1}^{n} \log x_i - n \log \lambda - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{3\lambda}$$

Vi deriverar med avseende på λ:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{x}; \lambda) = -n\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

Slutligen sätter vi $\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\mathbf{x}; \lambda) = 0$, löser ut λ, och får

$$\lambda^* = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$