Formelsamling VT15
Matematisk statistik för K, TMA073

Sannolikhetsteorins grunder

- Följande gäller för sannolikheter
  - $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$
  - $\mathsf{P}(\Omega) = 1$
  - $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ om händelserna A och B är oförenliga (disjunkta)
- Additionssatsen för två händelser: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$
- Betingad sannolikhet: $\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)}$
- Bayes sats: $\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}$
- Satsen om total sannolikhet: $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)$, där händelserna $B_1, \ldots, B_n$ är parvis oförenliga händelser och $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
- A och B är oberoende $\Leftrightarrow \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$

Endimensionella stokastiska variabler

- Fördelningsfunktionen för X: $F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$
- Sannolikhetsfunktionen för en diskret s.v. X: $p_X(k) = \mathsf{P}(X = k)$
- Täthetsfunktionen för en kontinuerlig s.v. X: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- $\mathsf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \begin{cases} \sum_{k=a+1}^{b} p_X(k) \text{ om } X \text{ är diskret och } a \text{ och } b \text{ är heltal} \\ \int_a^b f_X(x)dx \text{ om } X \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$

Flerdimensionella stokastiska variabler

- Simultan fördelningsfunktion:

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathsf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} \sum_{i \leq x, j \leq y} p_{X,Y}(i,j), & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t,u)dtdu, & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$$

- Marginell täthetsfunktion: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
- $\mathsf{P}(a \leq X \leq b \text{ och } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)dxdy$.
- X och Y är oberoende om
  - $p_{X,Y}(i,j) = p_X(i)p_Y(j)$ för alla i och j för diskreta s.v.
  - $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x och y för kontinerliga s.v.

Väntevärden

- Väntevärdet av $g(X,Y)$:

$$\mathsf{E}(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(i,j)p_{X,Y}(i,j), & \text{(diskret s.v.)} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)dxdy, & \text{(kontinuerlig s.v.)} \end{cases}$$

- Varians: $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}((X - \mathsf{E}(X))^2) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$
- Standardavvikelse: $\sqrt{V(X)}$
- Kovarians: $\mathsf{C}(X,Y) = \mathsf{E}((X - \mathsf{E}(X))(Y - \mathsf{E}(Y))) = \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$
- Väntevärde av linjärkombintaion: $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathsf{E}(X_i) + b$
- Varians av linjärkombination: $\mathsf{V}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathsf{V}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \mathsf{C}(X_i, X_j)$
- Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende så är de okorrelerade, dvs $\mathsf{C}(X_i, X_j) = 0, i \neq j$
- Korrelationskoefficient: $\rho(X,Y) = \frac{\mathsf{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{V}(X)\mathsf{V}(Y)}}$

Vanliga fördelningar

Fördelning	$p(k)$ eller $f(x)$		väntevärde	varians
Binomial Bin(n,p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$k = 0, \ldots, n$	np	np(1-p)
Poisson Po(μ)	$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$	$k = 0, 1, \ldots$	μ	μ
Geometrisk Ge(p)	$p(1-p)^{k-1}$	$k = 1, 2, \ldots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Likformig U(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential Exp(λ)	$\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$	$x \geq 0$	λ	λ^2
Normal $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	μ	σ^2
χ^2-fördelning $\chi^2(n)$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-x/2} x^{n/2-1}$	$x \geq 0$	n	$2n$
t-fördelning t(ν)	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$-\infty \leq x \leq \infty$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}$ om $\nu > 2$ ∞ om $1 < \nu \leq 2$
F-fördelning F(n,m)	$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2}) n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}}$	$x \geq 0$	$\frac{m}{m-2}$ om $m > 2$	$\frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ om $m > 4$

Egenskaper hos vanliga fördelningar

- $X \sim \text{Bin}(n_1, p)$, $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$ samt oberoende $\Rightarrow X + Y \sim$Bin$(n_1 + n_2, p)$
- $X \sim$Po(μ_1), $Y \sim$Po(μ_2) samt oberoende $\Rightarrow X + Y \sim$Po$(\mu_1 + \mu_2)$
- $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0, 1)$
- $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow F_X(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ där $\Phi(\cdot)$ ges av tabell.
- $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, n$ oberoende $\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathsf{N}(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$
- $X \sim \mathsf{N}(0, 1), Y \sim \chi^2(\nu)$ samt oberoende $\Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \sim t(\nu)$
- $X_1, \ldots, X_n$ oberoende och $\mathsf{N}(0, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$
- $X_1, \ldots, X_n$ oberoende och $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$
- $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ samt oberoende $\Rightarrow \frac{X/n}{Y/m} \sim F(n, m)$
- $F_{1-\alpha}(n, m) = 1/F_\alpha(m, n)$

Centrala gränsvärdessatsen

Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och likafördelade med $\mathsf{E}(X_i) = \mu_i$ och $\mathsf{V}(X_i) = \sigma^2$ så gäller att $\sum_{i=1}^n X_i$ är approximativt $\mathsf{N}(n\mu, n\sigma^2)$-fördelad om n är stort nog. Från bland annat detta följer följande approximationer

- Po$(\mu) \approx \mathsf{N}(\mu, \mu)$ om $\mu \geq 15$
- Bin$(n, p) \approx \mathsf{N}(np, np(1-p))$ om $np(1-p) \geq 10$
- Bin$(n, p) \approx$ Po(np) om $p \leq 0.1$ och $n \geq 10$

Statistik och punktskattningar

Beskrivning av data:

- Stickprovsmedelvärde: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
- Stickprovsvarians: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right]$
- Stickprovskovarians: $c_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
- Korrelationskoefficient: $r_{xy} = \frac{c_{xy}}{s_x s_y}$

Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara observationer av oberoende och likafördelade s.v. $X_1, \ldots, X_n$ med väntevärde μ och varians σ^2, då är stickprovsmedelvärdet en väntevärdesriktig skattning av μ och stickprovsvariansen en väntevärdesriktig skattning av σ^2.

Intervallskattningar

Samtliga intervall nedan är tvåsidiga med $100(1-\alpha)\%$ konfidensgrad

- μ då $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ och σ är känd

$$I_\mu = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- μ då $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ och σ är okänd

$$I_\mu = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

- σ^2 då $X_i \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ och μ är okänd

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

- $\mu_1 - \mu_2$ då $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, \ldots, n_1$ och $Y_i \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2), i = 1, \ldots, n_2$
  - då σ_1 och σ_2 är kända

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}\right)$$

  - då $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ där σ är okänd

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right), \text{ där } s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

  - då $\sigma_1 \neq \sigma_2$ är okända (approximativt)

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right), \text{ där } f = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

- σ_1^2/σ_2^2 då $X_i \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2), i = 1, \ldots, n_1$ och $Y_i \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2), i = 1, \ldots, n_2$ där μ_1 och μ_2 okända

$$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

- Δ då $Z_i = X_i - Y_i \sim \mathsf{N}(\Delta, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$ där σ okänd (stickprov i par)

$$I_\Delta = \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s_z}{\sqrt{n}}\right)$$

- p då $X \sim \text{Bin}(n, p)$ (approximativt då $np(1-p) \geq 10$)

$$I_p = \left(p^* \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}\right), \text{ där } p^* = \frac{x}{n}$$

- $p_1 - p_2$ då $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p_1)$ och $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p_2)$(approximativt då $n_ip_i(1-p_i) \geq 10$)

$$I_{p_1-p_2} = \left(p_1^* - p_2^* \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}\right), \text{ där } p_i^* = \frac{x_i}{n_i}$$

- μ då $X \sim$Po(μ) (approximativt då $\mu \geq 15$)

$$I_\mu = \left(x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{x}\right)$$

Regression

Modellen är $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$ där $\varepsilon_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ är oberoende.

- Minsta-kvadratskattningar

$$\beta_1^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \sim \mathsf{N}(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$$

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x} \sim \mathsf{N}\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

$$s^2 = \frac{Q_0}{n-2} \text{ där } Q_0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0^* - \beta_1^* x_i)^2 = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2, S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_Y(x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$

$$I_{\mu_Y(x_0)} = \left(\beta_0^* + \beta_1^* x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right)$$

- Tvåsidigt prediktionsintervall för $Y(x_0)$

$$I_{Y(x_0)} = \left(\beta_0^* + \beta_1^* x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right)$$

Tabell 1: Normalfördelningen

Tabellen visar $\Phi(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$ där $X \sim \mathsf{N}(0, 1)$.
För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0 :	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1 :	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2 :	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3 :	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4 :	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5 :	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6 :	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7 :	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8 :	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9 :	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0 :	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1 :	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2 :	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3 :	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4 :	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5 :	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6 :	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7 :	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8 :	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9 :	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0 :	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1 :	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2 :	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3 :	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4 :	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5 :	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952

Tabell 2: Normalfördelningens kvantiler

Tabellen visar $\mathsf{P}(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \sim \mathsf{N}(0, 1)$

α	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005	.0001	.00005	.00001
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190	3.8906	4.2649

Tabell 3: t-fördelningens kvantiler

Tabellen visar $\mathsf{P}(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \sim t(f)$

α	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$t_\alpha(1)$	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.657	318.31	636.62
$t_\alpha(2)$	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
$t_\alpha(3)$	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
$t_\alpha(4)$	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
$t_\alpha(5)$	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
$t_\alpha(6)$	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
$t_\alpha(7)$	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
$t_\alpha(8)$	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
$t_\alpha(9)$	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
$t_\alpha(10)$	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
$t_\alpha(11)$	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
$t_\alpha(12)$	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
$t_\alpha(13)$	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
$t_\alpha(14)$	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
$t_\alpha(15)$	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
$t_\alpha(16)$	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
$t_\alpha(17)$	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
$t_\alpha(18)$	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
$t_\alpha(19)$	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
$t_\alpha(20)$	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
$t_\alpha(21)$	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
$t_\alpha(22)$	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
$t_\alpha(23)$	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
$t_\alpha(24)$	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
$t_\alpha(25)$	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
$t_\alpha(26)$	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
$t_\alpha(27)$	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
$t_\alpha(28)$	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
$t_\alpha(29)$	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
$t_\alpha(30)$	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
$t_\alpha(40)$	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
$t_\alpha(60)$	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
$t_\alpha(120)$	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.1595	3.3735
$t_\alpha(\infty)$	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Tabell 4: χ^2-fördelningens kvantiler

Tabellen visar $\mathsf{P}(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \sim \chi^2(f)$

α	.9995	.999	.995	.99	.975	.95	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$\chi^2_\alpha(1)$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
$\chi^2_\alpha(2)$	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
$\chi^2_\alpha(3)$	0.02	0.02	0.07	0.12	0.22	0.35	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
$\chi^2_\alpha(4)$	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
$\chi^2_\alpha(5)$	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
$\chi^2_\alpha(6)$	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
$\chi^2_\alpha(7)$	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
$\chi^2_\alpha(8)$	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
$\chi^2_\alpha(9)$	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
$\chi^2_\alpha(10)$	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
$\chi^2_\alpha(11)$	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
$\chi^2_\alpha(12)$	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
$\chi^2_\alpha(13)$	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
$\chi^2_\alpha(14)$	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
$\chi^2_\alpha(15)$	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
$\chi^2_\alpha(16)$	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
$\chi^2_\alpha(17)$	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9
$\chi^2_\alpha(18)$	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4
$\chi^2_\alpha(19)$	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0
$\chi^2_\alpha(20)$	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5
$\chi^2_\alpha(21)$	5.90	6.45	8.03	8.90	10.3	11.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	49.0
$\chi^2_\alpha(22)$	6.40	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	50.5
$\chi^2_\alpha(23)$	6.92	7.53	9.26	10.2	11.7	13.1	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	52.0
$\chi^2_\alpha(24)$	7.45	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	53.5
$\chi^2_\alpha(25)$	7.99	8.65	10.5	11.5	13.1	14.6	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	54.9
$\chi^2_\alpha(26)$	8.54	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	56.4
$\chi^2_\alpha(27)$	9.09	9.80	11.8	12.9	14.6	16.2	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	57.9
$\chi^2_\alpha(28)$	9.66	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	59.3
$\chi^2_\alpha(29)$	10.2	11.0	13.1	14.3	16.0	17.7	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	60.7
$\chi^2_\alpha(30)$	10.8	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	62.2
$\chi^2_\alpha(40)$	16.9	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	76.1
$\chi^2_\alpha(50)$	23.5	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	89.6
$\chi^2_\alpha(60)$	30.3	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6	103
$\chi^2_\alpha(70)$	37.5	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	90.5	95.0	100	104	112	116
$\chi^2_\alpha(80)$	44.8	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	102	107	112	116	125	128
$\chi^2_\alpha(90)$	52.3	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	113	118	124	128	137	141
$\chi^2_\alpha(100)$	59.9	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	124	130	136	140	149	153