

Föreläsning 10: Jämförelser

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
Maj 11, 2015



Hypotesprövning

Vi har ett stickprov med någon fördelning med okänd parameter θ .

Vi vill testa *nollhypotesen*

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

mot *mothypotesen*

$$H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Om testet bekräftar att det finns ett systematiskt fel säger vi att H_0 förkastas till förmån för H_1 . Man brukar då också säga att θ är signifikant skild från θ_0 .

Principen för testet bör vara att vi beräknar en skattning θ^* av θ och förkastar H_0 om θ^* är långt från θ_0 . Vi ställs då inför frågorna

- 1 Vad innebär att θ^* är långt från θ_0 ?
- 2 Hur kan vi ange säkerheten i slutsatsen vi drar?

Konfidsensintervallmetoden

Om vi bildar ett 95% konfidsensintervall I_θ för θ kan vi direkt använda detta för att göra hypotestestet.

- Vi förkastar H_0 om intervallet inte innehåller θ_0 .
- Om intervallet däremot innehåller θ_0 kan vi inte förkasta H_0 .

Konfidsensgraden vi använder när vi beräknar konfidsensintervallet är också konfidsensgraden för hypotestestet vi gör.

Definition

Felrisken eller signifikansnivån definieras som

$$\alpha = P(H_0 \text{ förkastas} \mid H_0 \text{ sann}).$$

Översatt till konfidsensintervall är signifikansnivån

$$\alpha = P(\theta \notin I_\theta \text{ om } \theta = \theta_0) = P(\theta_0 \notin I_\theta).$$

Typ 2 fel

Felet vi gör om vi förkastar H_0 trots att den är sann brukar kallas för ett "Typ 1 fel".

Den andra sortens fel vi kan göra är "Typ 2 fel":

Definition

Under hypotesprövning säger vi att vi gör ett typ 2 fel om vi inte förkastar H_0 trots att H_1 är sann. Sannolikheten för att göra ett typ 2 fel brukar betecknas med β :

$$\beta = P(H_0 \text{ förkastas inte} \mid H_1 \text{ sann}).$$

Sannolikheten för att göra ett sådant fel betecknas med β . Sannolikheten att *inte* göra ett typ 2 fel kallas för testets *styrka*, och ges alltså av $1 - \beta$.

Teststorheter

Definition

En teststorhet $T = T(X_1, \dots, X_n)$ är en funktion av observationerna, och alltså en slumpvariabel. $T_{obs} = T(x_1, \dots, x_n)$ är ett observerat värde av teststorheten för givna observationer.

I allmänhet innehåller teststorheten en skattning θ^* av parametern.

Givet att vi har formulerat vår teststorhet gör vi testet genom att beräkna ett p-värde.

Definition

p-värdet eller signifikanssannolikheten definieras som sannolikheten under nollhypotesen att vi får ett värde $|T|$ som är lika stort eller större än det observerade värdet $|T_{obs}|$.

p-värden

Vi vill använda en storhet T som vi känner fördelningen av under H_0 , så att vi kan beräkna p-värdet.

I fallet med normalfördelning med känd varians kan vi använda

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

har vi att T under H_0 är $N(0, 1)$ -fördelad, så vi har att

$$p = P(|T| \geq |T_{obs}|) = 2 \cdot P(T \geq |T_{obs}|) = 2(1 - \Phi(|T_{obs}|)).$$

Vi förkastar H_0 om p är litet, och det exakta värdet på p är den minsta signifikansnivå vi kan ha för att förkasta H_0 .

Om vi vill göra ett test med en fix signifikansnivå α , tex 0.05, behöver vi alltså endast beräkna p och sedan förkasta H_0 om $p < \alpha$.

Ensidiga test

I vissa situationer kan vi vilja testa om det observerade värdet ligger för högt respektive för lågt i förhållande till referensvärdet.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0 \text{ (eller } \theta < \theta_0)$$

Om vi använder konfidensintervall för att göra testet ska vi nu använda ett ensidigt intervall

- om $H_1 : \theta > \theta_0$: $I_\theta = \{a, \infty\}$.
- om $H_1 : \theta < \theta_0$: $I_\theta = \{-\infty, b\}$.

Vi förkastar H_0 om intervallet inte täcker θ_0 .

Använder vi oss av en teststorhet och vi beräknar då p-värdet som

- om $H_1 : \theta > \theta_0$: $p = P_{H_0}(T \geq T_{obs})$.
- om $H_1 : \theta < \theta_0$: $p = P_{H_0}(T \leq T_{obs})$.

och förkastar sedan H_0 om $p \leq \alpha$.

Täthetsfunktioner för $F(f_1, f_2)$ -fördelningen