1. (a) Låt X beteckna utfallet på tärningskastet, vi har då

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=1}^{12} k\frac{1}{12} = \frac{1+2+\cdots+12}{12} = \frac{78}{12} = 6.5$$
$$\mathsf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{12} k^2\frac{1}{12} = \frac{1+2^2+\cdots+12^2}{12} = \frac{650}{12} \approx 54.1667$$

Detta ger $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = \frac{650}{12} - \frac{78^2}{12^2} = \frac{1716}{144} = \frac{143}{12} \approx 11.9167$.

(b) Låt A beteckna händelsen att det snöar och låt B beteckna händelsen att tåget blir försenat. Vi söker $\mathsf{P}(A|B)$ och känner $\mathsf{P}(A) = 0.3$, $\mathsf{P}(B|A) = 0.7$ samt $\mathsf{P}(B|A^c) = 0.1$. Bayes sats samt satsen om total sannolikhet ger:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B|A^c)\mathsf{P}(A^c)} = \frac{0.7\cdot 0.3}{0.7\cdot 0.3+0.1\cdot 0.7} = \frac{3}{4}$$

2. (a) Låt $X \sim \mathsf{N}(10, 0.5^2)$ vara längden, vi söker då

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(|X-10|>1) &= \mathsf{P}(X>11)+\mathsf{P}(X<9) = 1-\mathsf{P}(X<11)+\mathsf{P}(X<9)\\ &= 1-\Phi\left(\frac{11-10}{0.5}\right)+\Phi\left(\frac{9-10}{0.5}\right) = 1-\Phi(2)+\Phi(-2)\\ &= 1-\Phi(2)+1-\Phi(2) = 2(1-\Phi(2))\\ &\approx 0.0455\end{aligned}$$

(b) Antalet gånger, Y, maskinen måste försöka är geometriskt fördelat med parameter $p = 1 - 0.0455 = 0.9545$. Vi söker

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y>2) &= 1-\mathsf{P}(Y=1)-\mathsf{P}(Y=2)\\ &= 1-p(1-p)^0-p(1-p)^1\\ &= 1-0.9545(1+0.0455)\\ &\approx 0.0021\end{aligned}$$

3. (a) Antag att mätningarna från mätutrustning 1 är observationer av $X \sim \mathsf{N}(\mu_x, \sigma^2)$ och att mätningarna från mätutrustning 2 är observationer av $Y \sim \mathsf{N}(\mu_y, \sigma^2)$. Vi vill testa $H_0 : \mu_x = \mu_y$ mot $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.
Vi har $\bar{x} = 9.0377$, $\bar{y} = 9.7883$, $s_x = 0.6093$, och $s_y = 0.2268$. En poolad skattning av σ ges av $s_p = \sqrt{(s_x^2+s_y^2)/2} = 0.4597$. Ett 95% konfidensintervall för $\mu_x - \mu_y$ ges av

$$I_{\mu_x-\mu_y} = \left[\bar{x}-\bar{y} \pm t_{0.025}(8)s_p\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}\right] = [-1.4210, -0.0801]$$

Intervallet täcker ej 0 och vi kan därför förkasta H_0 på nivå 0.05.

(b) Vi vill testa $H_0 : \mu_x = 10$ mot $H_1 : \mu_x \neq 10$. Vi beräknar ett konfidensintervall för μ_x:

$$I_{\mu_x} = \left[\bar{x} \pm t_{0.025}(4)\frac{s_x}{\sqrt{5}}\right] = [8.2812, 9.7943]$$

Eftersom detta ej täcker 10 kan vi förkastas H_0. Mätutrustning 1 har alltså ett systematiskt fel. Alternativt hade vi också kunnat utnyttja att vi har samma varians i två stickproven och användas oss av den poolade skattningen:

$$I_{\mu_x} = \left[\bar{x} \pm t_{0.025}(8)\frac{s_p}{\sqrt{5}}\right] = [8.5637, 9.5118].$$

4. (a) Vi har $n = 6$ observationer och beräknar $\bar{x} = 54.8333$, $\bar{y} = 10.9500$ samt

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = 858.8333,$$
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})^2 = 5.4550,$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = 63.3500$$

Parameterskattningarna ges nu av

$$\beta_1^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.0738, \quad \beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^*\bar{x} = 6.9053, \quad s^2 = \frac{S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}}{n-2} = \frac{0.7821}{4} = 0.1955.$$

(b) Med $\alpha = 0.05$ och $t_{\alpha/2}(n-2) = 2.7764$ får vi intervallet

$$I_{\beta_1} = \left[\beta_1^* \pm t_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}}\right] = [0.0738 \pm 2.7764 \cdot 0.0151] = [0.0319, 0.1157]$$

(c) Med $\alpha = 0.05$ och $t_{\alpha/2}(n-2) = 2.7764$ får vi intervallet

$$I_{\beta_0} = \left[\beta_0^* \pm t_{\alpha/2}(n-2)s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}\right] = [4.5542, 9.2565]$$

5. (a) Låt X beteckna antalet som äter julskinkan. Vi har då $X \sim$Bin$(25, p)$ och vill testa $H_0 : p = 0.9$ mot $H_1 : p < 0.9$, där vi väljer signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Enligt direktmetoden beräknar vi p-värdet för testet som

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X \leq 20 | X \sim \text{Bin(25,0.9)}) &= 1 - \mathsf{P}(X > 20 | X \sim \text{Bin(25,0.9)}) \\
&= 1 - (p_X(21) + p_X(22) + p_X(23) + p_X(24) + p_X(25)) \\
&= 1 - \sum_{k=21}^{25} \binom{25}{k} 0.9^k \cdot 0.1^{25-k} \\
&= 1 - (0.1384 + 0.2265 + 0.2659 + 0.1994 + 0.0718) \\
&= 1 - 0.9020 = 0.0980
\end{aligned}$$

Eftersom p-värdet är större än α så kan vi inte förkasta H_0.

(b) Låt X_i vara oberoende likafördelade variabler med ändlig varians. Centrala gränvärdessatsen säger att vi kan approximera fördelningen för summan $\sum_{i=1}^{n} X_i$ med en normalfördelning om n är tillräckligt stort. Om $X \sim$Bin(n, p) så kan vi använda CGS eftersom vi har $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ där X_i är oberoende och Bernoullifördelade variabler.

(c) Om X ~Bin(n,p) är också X approximativt normalfördelad enligt CGS, $X \sim \mathsf{N}(np, np(1-p))$. Alltså har vi approximativt $p^* = X/n \sim \mathsf{N}(p, p(1-p)/n)$ och vi vill som tidigare testa $H_0 : p = 0.9$ mot $H_1 : p < 0.9$. Vi har $p^* = 20/25 = 0.8$ och beräknar ett konfidensintervall för p som:

$$I_p = \left[0,\ p^* + z_{0.05}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{25}}\right] = [0, 0.9316]$$

Eftersom intervallet täcker 0.9 kan vi inte heller med normalapproximation förkasta H_0.

(d) Låt Y beteckna antalet som äter den kravmärkta julskinkan. Vi har då Y ~Bin$(30, \tilde{p})$. Vi har $p_d^* = \tilde{p}^* - p^* = Y/30 + X/25$ och skattarens väntevärde och varians ges av

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(p^*) &= \mathsf{E}\left(\frac{Y}{30}\right) - \mathsf{E}\left(\frac{X}{25}\right) = \frac{\mathsf{E}(Y)}{30} - \frac{\mathsf{E}(X)}{25} = \frac{30\tilde{p}}{30} - \frac{25p}{25} = \tilde{p} - p \\
\mathsf{V}(p^*) &= \mathsf{V}\left(\frac{Y}{30}\right) - \mathsf{V}\left(\frac{X}{25}\right) = \frac{\mathsf{V}(Y)}{30^2} - \frac{\mathsf{V}(X)}{25^2} \\
&= \frac{30\tilde{p}(1-\tilde{p})}{30^2} - \frac{25p(1-p)}{25^2} \\
&= \frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{30} - \frac{p(1-p)}{25}
\end{aligned}$$

(e) Vi vill testa $H_0 : p_d = 0$ mot $H_1 : p_d > 0$. Vi har $p_d^* = 27/30 - 20/25 = 0.1$, och ett approximativt ensidigt konfidensintervall ges av

$$I_{p_d} = \left[p_d^* - z_\alpha\sqrt{\frac{\tilde{p}^*(1-\tilde{p}^*)}{30} + \frac{p^*(1-p^*)}{25}}, \infty\right] = [-0.0595,\ \infty].$$

Eftersom intervallet täcker noll kan vi inte förkasta H_0, och testet påvisar alltså inte att gästerna föredrar den kravmärkta skinkan.

6. (a) Integralen av täthetsfunktionen måste vara 1, vilket ger

$$\int f(x)dx = c\int_0^r 1 - \frac{x}{r}dx = \frac{cr}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{r}$$

Väntevärdet ges av

$$\mathsf{E}(X) = \frac{2}{r}\int xf(x)dx = \frac{2}{r}\int_0^r x(1-\frac{x}{r})dx = \frac{2}{r}(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3r}) = \frac{r}{3}$$

För att beräkna variansen beräknar vi först

$$\mathsf{E}(X^2) = \frac{2}{r}\int x^2 f(x)dx = \frac{2}{r}\int_0^r x^2(1-\frac{x}{r})dx = \frac{2}{r}(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4r}) = \frac{r^2}{6}$$

och får sedan variansen som

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = \frac{r^2}{6} - \frac{r^2}{9} = \frac{r^2}{18}$$

(b) För $x < 0$ har vi $F(x) = 0$, för $x > r$ har vi $F(x) = 1$ och för $0 \le x \le r$ har vi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_0^x \frac{2}{r}(1-\frac{y}{r})dy = \frac{2}{r}(x - \frac{x^2}{2r})$$

(c) Vi har en parameter r att skatta och vill därför lösa ut denna ur ekvationen $\mathsf{E}(X) = M_1$ där $M_1 = \bar{x}$ är förstamomentet för stickprovet. Eftersom $\mathsf{E}(X) = \frac{r}{3}$ får vi alltså

$$\frac{r}{3} = \bar{x} \Rightarrow \hat{r} = 3\bar{x}.$$

(d) $\hat{r}$ är väntevärdesriktig eftersom

$$\mathsf{E}(\hat{r}) = \mathsf{E}(3\bar{x}) = 3\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 3\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(x_i) = 3\frac{1}{n}n\frac{r}{3} = r.$$