Föreläsning 3: Diskreta fördelningar

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
September 7, 2015

Kolmogorovs axiomsystem

Kolmogorovs axiomsystem

Låt Ω vara ett utfallsrum. En sannolikhet, eller sannolikhetsmått $\mathsf{P} : \Omega \to \mathbb{R}$ är en reell funktion som tar händelser i Ω som argument och returnerar ett reellt tal, och som uppfyller

1. $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$.
2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.
3. Om $A_1, A_2, \ldots$ är än följd av disjunkta händelser så gäller att

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Speciellt så gäller att om händelserna A och B är disjunkta så är

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Egenskaper hos sannolikhetsmåttet

Ur axiomen kan vi härleda följande egenskaper.

Egenskaper

För ett sannolihetsmått P gäller att

1. $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$.
3. $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

Att dessa är uppfyllda inses enkelt genom att rita Venndiagram!

Betingade sannolikheter

Vi vill ibland beräkna sannolikheten för en händelse A givet att vi vet att en annan händelse B har inträffat. Vi vill då veta den så kallade betingade sannolikheten för A givet B.

Betingad sannolikhet

Antag att $\mathsf{P}(B) > 0$. Den betingade sannolikheten för A givet B definieras som

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}. \tag{1}$$

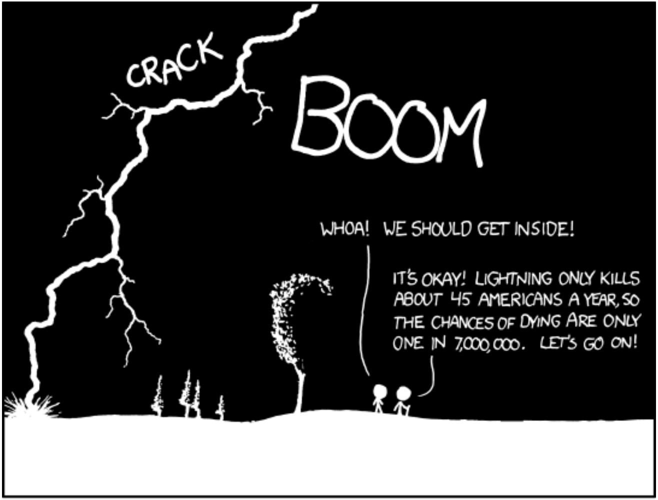
Multiplikationssatsen för sannolikheter

Om A och B är händelser så gäller att

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B).$$

Multiplikationssatsen är speciellt användbar för att beräkna sannolikheten för successiva händelser som påverkar varandra.

XKCD förklarar betingad sannolikhet



THE ANNUAL DEATH RATE AMONG PEOPLE WHO KNOW THAT STATISTIC IS ONE IN SIX.

Bayes sats

Bayes sats

För två händelser A och B gäller att

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)} \tag{2}$$

Man har ofta nytta av att skriva om nämnaren $\mathsf{P}(B)$ som

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B|A)\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B|A^c)\mathsf{P}(A^c)$$

Bayes sats lite mer generell

Antag $A_1, \ldots, A_n$ är disjunkta händelser så att $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Låt B vara en händelse med $\mathsf{P}(B) > 0$, vi har då för $1 \leq j \leq n$

$$\mathsf{P}(A_j|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A_j)\mathsf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B|A_i)\mathsf{P}(A_i)} \tag{3}$$

Oberoende händelser

Två händelser sägs vara statistiskt oberoende om sannolikheten för den ena inte påverkas av om den andra inträffat eller inte. Det vill säga att $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$.

Oberoende händelser

Två händelser A och B är oberoende om $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

Oberoende händelser

Låt $A_1, \ldots, A_n$ vara n händelser. Dessa sägs vara oberoende om vi för varje delmängd $A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}$ har att

$$\mathsf{P}(A_{(1)} \cap A_{(2)} \cap \ldots \cap A_{(m)}) = \mathsf{P}(A_{(1)})\mathsf{P}(A_{(2)}) \cdots \mathsf{P}(A_{(m)}).$$

The Monty Hall Problem

Ett problem baserat på TV-programmet Let's make a deal.

- I studion finns tre dörrar, bakom en dörr finns en bil och bakom de andra två finns getter.
- Den tävlande väljer en dörr utan att öppna den och programledaren öppnar en av de andra som innehåller en get.
- Den tävlande ges nu möjligheten att antingen öppna den valda dörren eller att byta och öppna den andra stängda dörren.
- Ska den tävlande byta dörr?
- Om den tävlande vill ha geten är valet enkelt, som XKCD visar: