12.7 Använd datan från uppgift 11.7:

	x	y	
x_1	20	1.8	y_1
x_2	30.5	3.0	y_2
x_3	40	4.8	y_3
⋮	⋮	⋮	⋮
x_8	95.2	9.1	y_8

(a) Använd matris-metoden för att hitta normalekvationen, jämför med normalekvationerna från kap 11 (dvs med svaret till uppg. 11.8)

Vi har $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1 x$ (enkel regression, specialfall av multipel regr.)

Normalekvationen (s454):

$$(X'X)\hat{\beta} = X'y$$

där

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 30.5 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 95.2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3.0 \\ \vdots \\ 9.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 20 & 30.5 & \dots & 95.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 30.5 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 95.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{1+1+\dots+1}^{8} & \overbrace{20.5+30.5+\dots+95.2}^{\sum_{i=1}^{8} x_i} \\ \underbrace{20.5+30.5+\dots+95.2}_{\sum_{i=1}^{8} x_i} & \underbrace{20.5^2+30.5^2+\dots+95.2^2}_{\sum_{i=1}^{8} x_i^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 464.4 \\ 464.4 & 32089.96 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 20 & 30.5 & \dots & 95.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3.0 \\ \vdots \\ 9.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8+3.0+\dots+9.1 \\ 20\cdot 1.8 + 30.5\cdot 3.0 + \dots + 95.2\cdot 9.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.2 \\ 3173.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} y_i \\ \sum_{i=1}^{8} y_i x_i \end{pmatrix}$$

Alltså får vi normalekvationen

$$\begin{pmatrix} 8 & 464.4 \\ 464.4 & 32089.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.2 \\ 3173.17 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Normalekvationerna från kap 11 (s 383):

$$\begin{cases} 8\cdot\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{8} x_i = \sum_{i=1}^{8} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{8} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} 8\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 464.4 = 46.2 \\ \hat{\beta}_0 \cdot 464.4 + \hat{\beta}_1 \cdot 32089.96 = 3173.17 \end{cases} \qquad (2)$$

Alltså får man samma system av ekvationer med matris-metoden (dvs (1)) och från kap 11 (dvs (2))

(b) Lös normalekvationen, jämför med svaret på uppg. 11.7 (a)

Alltså, lös $(\underline{X}'\underline{X})\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix} = \underline{X}'y$

Multiplicera med inversen till $\underline{X}'\underline{X}$ på båda sidor

$$\underbrace{\underbrace{(\underline{X}'\underline{X})^{-1}(\underline{X}'\underline{X})}_{=I=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'y$$

så $\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'y$

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{pmatrix} 8 & 464.4 \\ 464.4 & 32089.96 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X}'\underline{X}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 32089.96 & -464.4 \\ -464.4 & 8 \end{pmatrix}}{8\cdot 32089.96 - 464.4\cdot 464.4}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 32089.96 & -464.4 \\ -464.4 & 8 \end{pmatrix}}{8\cdot 32089.96 - 464.4^2}\begin{pmatrix} 46.2 \\ 3173.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2177 \\ 0.0957 \end{pmatrix}$$

Svaret på uppg. 11.7 (a): $\hat{\beta}_1 = S_{xy}/S_{xx} = \_ = 0.0957$, så samma svar!

$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = \_ = 0.2177$