Föreläsning 6: Sannolikhetsteori för flera variabler

Matematisk statistik

David Bolin
Chalmers University of Technology
September 19, 2018

Normalfördelningen

Standardiserad normalfördelning

En slumpvariabel Z sägs ha en standardiserad normalfördelning om $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$. Vi betecknar oftast dess täthetsfunktion och fördelningsfunktion med $\varphi(x)$ och $\Phi(x)$

Sats

Om $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ så gäller att $aX + b \sim \mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Detta betyder att om $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ så gäller

- $X = \mu + \sigma Z$ där $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.
- $Z = (X - \mu)/\sigma \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Vi kan använda detta för att beräkna sannolikheter:

$$\mathsf{P}(X < x) = \mathsf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathsf{P}\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Normalfördelningen

Normalfördelningen

En kontinuerlig slumpvariabel X är normalfördelad, $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, med parametrar $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$, om den har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

Fördelningsfunktionen ges av

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right) dy$$

Parametrar

Om $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ har vi att $\mathsf{E}(X) = \mu$ och $\mathsf{V}(X) = \sigma^2$.

Centrala gränsvärdessatsen

CGS

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade slumpvariabler med väntevärde μ och varians $\sigma^2 < \infty$. Då gäller att

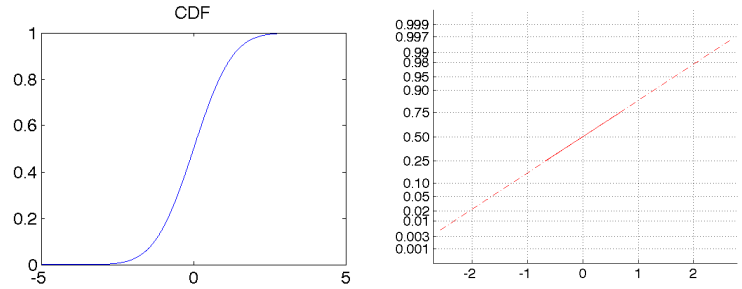
$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \Phi(x), \quad \text{då } n \to \infty.$$

Om n är stor har vi enligt satsen att

- $\sum_{i=1}^n X_i$ är approximativt $\mathsf{N}(n\mu, n\sigma^2)$-fördelad.
- $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ är approximativt $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2/n)$-fördelad.

Hur stor n måste vara beror på fördelningen av X_i.

Normalfördelningsdiagram

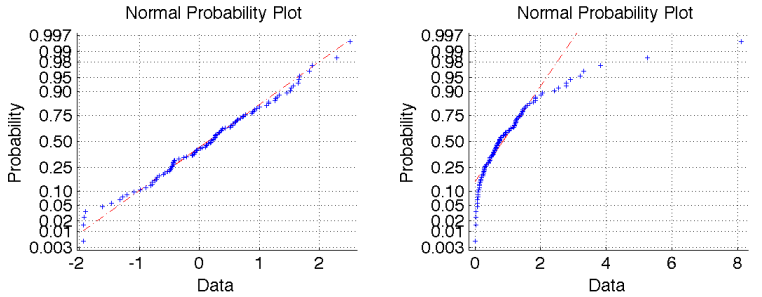


Som bekant kan fördelningsfunktionen för en normalfördelning skrivas som

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy$$

Om vi plottar $F(x)$ är det möjligt att transformera skalan på y-axeln så funktionen blir en rät linje. Detta illustras i Figuren ovan.

Normalfördelningsdiagram



Två exempel där vi plottar normalfördelad och exponentialfördelad data i normalfördelningsdiagram. Detta görs enkelt i Matlab med kommandot `normplot`.

Normalfördelningsdiagram

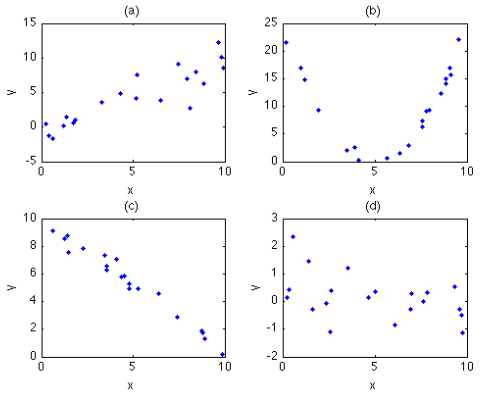
Antag att vi har data $x_1, \ldots, x_n$ och vill veta om en normalfördelning är en rimlig modell för datan. Vi kan använda normalfördelningsdiagrammet för detta.

Vi börjar med att beräkna den *empiriska fördelningsfunktionen*

$$F^*(x) = \frac{\text{antal värden} \leq x}{n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(x_i \leq x)$$

Vi plottar sedan punkterna $F^*(x_j)$ i ett normalfördelningsdiagram, och om datan är normalfördelad ska dessa punkter ligga längs en rät linje.

Beskrivning av tvådimensionell data



Antag att vi har mätningar (x_i, y_i). Ett spridningsdiagram är ett tvådimensionellt punktdiagram där varje mätning (x_i, y_i) ritas ut som en punkt i xy-planet.

Numerisk beskrivning av tvådimensionell data

För att ge numeriska mått på samvariation kan vi beräkna stickprovskovariansen, som definieras som

$$c_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

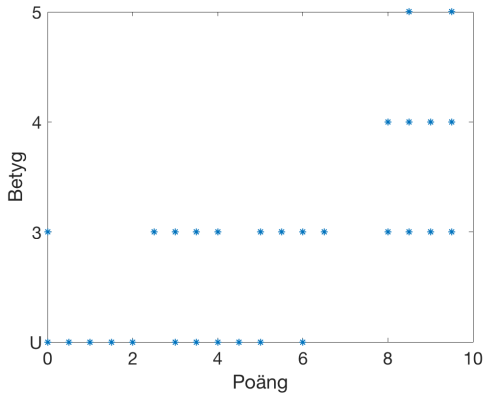
eller stickprovskorrelationen som definieras som

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Stickprovskorrelationen ett mått på linjärt beroende.

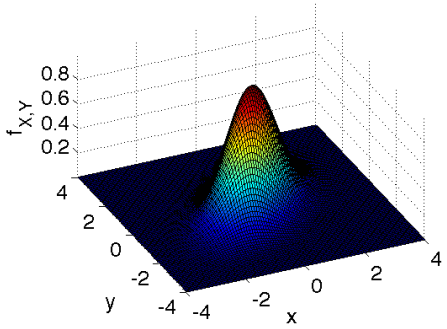
I bilden ovan har vi $r_{xy} = 0.8067$ i (a), $r_{xy} = 0.2912$ i (b), $r_{xy} = -0.9884$ i (c), och $r_{xy} = 0.3640$ i (d).

Exempel: Kursresultat 2017



Betyg på kursen 2017 (Y) mot poäng på uppgift 5 på tentan (X).
Korrelation: $r_{xy} = 0.7261$

Den tvådimensionella normalfördelningen

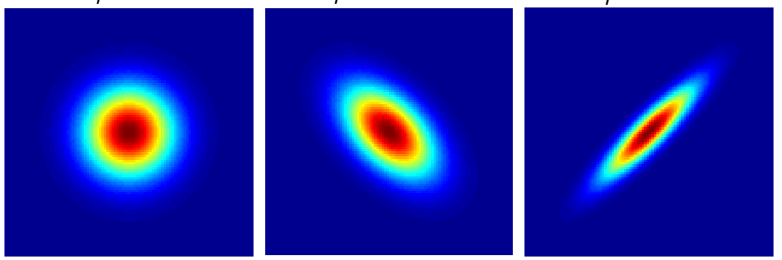


(X, Y) sägs ha en tvådimensionell normalfördelning om

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]\right)$$

Viktiga egenskaper

$\rho = 0$ $\rho = -0.5$ $\rho = 0.9$



Egenskaper:

- (μ_x, μ_y) och (σ_x, σ_y) väntevärdena och standardavvikelserna för X och Y, och ρ är korrelationskoefficienten.
- Om (X, Y) har en tvådimensionell normalfördelning så är $X \sim \mathsf{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ och $Y \sim \mathsf{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$.
- Den tvådimensionella normalfördelningen endast beskriva linjär samvariation, så om $\rho = 0$ så är X och Y oberoende.

En alternativ formulering

Ett alternativt sätt att skriva täthetsfunktionen är att införa en väntevärdesvektor $\boldsymbol{\mu}$ en *kovariansmatris* Σ och en vektor som innehåller x och y som

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y\rho \\ \sigma_x\sigma_y\rho & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vi kan då skriva täthetsfunktionen som

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

där $d = 2$ och $|\Sigma|$ är determinanten av Σ. Om vi har d variabler kan vi använda denna formulering för att beskriva en d-dimensionell normalfördelning.