LÖSNINGAR TILL TMA 321 MATEMATISK STATISTIK F/KF
2012-08-24 . OLLE NERMAN

1. a. ANTAL MÖJLIGA = 36, ANTAL GYNNSAMMA = 6 KLASSISK S. DEF $\Rightarrow P =$

b. A = POÄNGTALEN LIKA, B = SUMMAN ÄR 10, SÖKT $P(A|B) = P(A\cap B)/P(B) =$
$= (1/36)/(3/36) = \frac{1}{3}$

c. UTFALLSRUMMET FÖR $Y = \{$MÖJLIGA UTFALL$\} = \{0,1,2,3,4,5\}$

d. $E[Y] = \sum_{y=0}^{5} y\, p_Y(y) = 1\cdot\frac{10}{36} + 2\frac{8}{36} + \ldots + 5\frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

---

2. a. $M_X(t) = E[e^{tX}] = (1-p) + pe^t$

b. OBER. $\Rightarrow M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_{10}}(t) = ((1-p)+pe^t)^{10}$

c. $M_Y'(t) = 10pe^t((1-p)+pe^t)^9$ OCH $M_Y''(t) = 10\cdot 9\, p^2((1-p)+pe^t)^8 e^t + 10p(1-$

$\Longrightarrow E[Y] = M_Y'(0) = 10p$ OCH $E[Y^2] = M_Y''(0) = 10\cdot 9\cdot p^2$

$\therefore \ VAR[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 90p^2 + 10p - 100p^2 = 10p(1-p)$

---

3. a. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$ VIKTSUMMAN $X \approx N(33\cdot 150; 33\cdot 30$
(I GRAM). SÖKT SANNOLIKHET ÄR

$$P(X > 5000) = 1 - P(X \le 5000) \approx$$
$$1 - \Phi\left(\frac{5000 - 4950}{30\cdot\sqrt{33}}\right) = 1 - \Phi(0{,}29) \approx 0{,}386$$

b. Y_n SUMMAN AV VIKTERNA OM VI TAR n ÄPPLEN $\Longrightarrow$

$P(Y_n > 5000) \ge 0{,}95$ FÖR n STÖRRE ÄN
LÖSNINGEN TILL

$$1 - \Phi\left(\frac{5000 - n\cdot 150}{\sqrt{n}\, 30}\right) = 0{,}05$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{n\cdot 150 - 5000}{\sqrt{n}\, 30}\right) = 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{n\cdot 150 - 5000}{\sqrt{n}\, 30} = 1{,}65$$

LÖSNING GER ETT n STRAX ÖVER 35
$\therefore$ 36 ÄPPLEN BEHÖVS!

---

4. a. t-INTERVALL (SYMMETRISKT). FRIHETSGRADSTAL = 9
GER

$$\mu = \bar{x} \pm 3{,}25\cdot\frac{s_x}{\sqrt{10}} = 16{,}35 \pm \frac{3{,}25\cdot 6{,}47}{\sqrt{10}} \quad (99\%)$$

TY $F_{t(9)}(3{,}25) = 0{,}995$ UR TABELL.

b. FÖRKASTA OM $T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \ge c$, DÄR $F_{t(9)}(c) = 0{,}95$
$\mu_0 = 15$, $n = 10$. OBSERVERAT $t \approx 9{,}1$ OCH UR TABELL $c \approx 1{,}83$

$\Rightarrow$ VI FÖRKASTAR $H_0: \mu = \mu_0 = 15$ MOT $H_1: \mu \ge 15$

5. a. $P_{\bar{X}(10)}(k) = \frac{(10c)^k e^{-10c}}{k!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad$ PERB

$L(c) = \quad$ - " -

$\frac{d \ln L(c)}{dc} = 0 \iff \frac{d}{dc}\left(k \cdot \ln(10c) - 10c - \ln k!\right) = 0$

$\iff \frac{k}{c} - 10 = 0 \Rightarrow c = \frac{k}{10}$;

ML-ESTIMATOR (TEOR. PUNKTSKATTNING) $\hat{c} = \frac{\bar{X}(10)}{10}$

OBSERVERAD P.S. $\hat{c} = 5{,}8$

b. STANDARDFELET ÄR $\sqrt{VAR[\hat{c}]} = \sqrt{VAR\left[\frac{\bar{X}(10)}{10}\right]}$

$= \sqrt{\frac{VAR(\bar{X}(10))}{100}} = \sqrt{\frac{c \cdot 10}{100}} = \sqrt{\frac{c}{10}}$

c. UPPSKATTAT STANDARDFEL ÄR $\sqrt{\frac{\hat{c}}{10}} = \sqrt{0{,}58}$

6. SE KURSBOKEN

7. a. $F_Y(t) = F_X(t)^{10} = \begin{cases} 0 & \text{om } t \le 0 \\ (t/5)^{10} & \text{om } 0 < t < 5 \\ 1 & \text{om } t \ge 5 \end{cases}$

(HÄR BETECKNAR X EN LIKF. FÖRD PÅ INT. $[0,5]$.)

$f_Y(t) = F_Y'(t) = \begin{cases} 10 \cdot \left(\frac{t}{5}\right)^9 & 0 < t < 5 \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$

b. $E[Y] = \int_0^5 t \cdot 10 \left(\frac{t}{5}\right)^9 dt = \ldots = \frac{10 \cdot 5}{11} = 4\frac{6}{11}$

8 a. MED b_0 INTERCEPTET OCH b_1 LUTNINGEN SÅ SKATTAS $b_0 + b_1 x_0$ MED $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0$, DÄR $\hat{b}_0$ OCH $\hat{b}_1$ ÄR MINSTAKVADRATSKATTNINGARNA

$VAR[\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0] = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}\right]$

b. OM MAN SÄTTER $\bar{x} = x_0$ SÅ MINIMERAS UTTRYCKET! (OM DETTA INTE HELT MÖJLIGT AV PRAKTISKA SKÄL SÅ SKALL MAN HÅLLA $\bar{x}$ NÄRA x_0 OCH SAMTIDIGT SPRIDA UT x_i-VÄRDENA)

c. MAN FÅR INGEN KOLL PÅ MODELLANTAGANDET ATT MAN HAR EN LINJÄR REGRESSIONSFUNKTION! (M.M)