

1) a. Antal möjliga fall $m = 6^3 = 216$
Antal gynnsamma fall $g = 6$
 $\Rightarrow P(\text{Alla tärn. visar lika}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

b. $\{\text{mögliga utfall på } Y\} = \{3, 4, 5, \dots, 18\}$

c. $\{Y=17\} = \{(5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)\}$ har tre element $\Rightarrow$
 $P(Y) = \frac{3}{216}$ för $Y=17$.

d. $\{Y=5\} = \{(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (1,3,1), (1,1,3), (1,1,3)\}$
 $\{\text{utfall med produkt} = 3\} = \{(1,1,1), (1,3,1), (1,1,3)\} \Rightarrow$
 $P(\text{produkt} = 3 \mid Y=5) = \frac{3/216}{6/216} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) $E[X] = \frac{a+b}{2}$ och $\text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, där X
betecknar den stok. variabelen, från vilken
 $\frac{a+b}{2} = 0$ $\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = 1$ följer först

$a = -b$ och sedan $\sqrt{\frac{(2b)^2}{12}} = 1$, d.v.s.

att $b^2 = \pm\sqrt{3}$. Eftersom $a < b$ följer att

$a = -\sqrt{3}$ och $b = \sqrt{3}$,

3. a. $\lambda_X = \frac{1}{2}$ och $\lambda_Y = \frac{2}{7}$, $Z = \text{minimum av två oberoende}$
 $\text{exponentialfördelade variabler är ursprungligen}$
 $\text{i } a\text{-delen, denna variabel } Z \text{ är också}$
 $\text{exponentialfördelad med parameter } \lambda_X + \lambda_Y \text{ ty:}$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z)$

$= 1 - e^{-(\frac{1}{2} + \frac{2}{7})z}$

$f_Z(z) = (\frac{1}{2} + \frac{2}{7})e^{-(\frac{1}{2} + \frac{2}{7})z}$ är sannolikhetstätteten för Z

b. Nu är ursprungligen Z' är helt maximum av
 X och Y

$F_{Z'}(z) = P(\{X \leq z\} \cap \{Y \leq z\}) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$

$= (1 - e^{-\frac{1}{2}z})(1 - e^{-\frac{2}{7}z})$

$\frac{d}{dz} F_{Z'}(z) = f_{Z'}(z) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{7}e^{-\frac{2}{7}z} - (\frac{1}{2} + \frac{2}{7})e^{-(\frac{1}{2} + \frac{2}{7})z}$

är sannolikhetstätteten för Z'

4. a. $f(x,y) = c$ och $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$ (TY
ÄR AREAN AV $\{x^2+y^2 \leq 1\}$.

b. $\text{KOV}[X,Y] = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy \frac{1}{\pi} dx dy = 0$ ($E[X] = E[Y] = 0$ P.G. A
SYMMETRIN)
T.E.X. PÅNEN
KOORDINATERN

c. TÄTHETEN FÖR X OCH Y ÄR $f_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$, $-1 \leq x \leq 1$
RESPEKTIV $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$, $-1 \leq y \leq 1$, MEN DET BETYDER
T.E.X. ATT

$f_Y(y)f_X(x) > 0 = f(x,y)$ NÄR BÅDE $|x|$ OCH $|y|$
 $> \frac{1}{\sqrt{2}}$ OCH < 1 .

SLUTSÄTTEN ÄR ATT X OCH Y ÄR BEROENDE

5 a. $E[X/20] = \frac{E[X]}{20} = \frac{20c}{20} = c$. ALLSÄN ÄR $\hat{c} = \frac{X}{20}$
VÄRDEBÄRDESKITIZ

b. $\sqrt{\text{VAR}[Z]} = \frac{\sqrt{\text{VAR}[X]}}{20} = \frac{\sqrt{20c}}{20} = \frac{c}{\sqrt{20}}$ (ÄR $\frac{\hat{c}}{\sqrt{20}}$)
BERÄKN S.E. SKATTAD S.E.

c. $P(\text{INTERVALL AV UNGD 3 RÖR}) = \frac{(30)^0 e^{-3c}}{0!} = e^{-3c}$
 $\hat{c} = \frac{12}{20} \Rightarrow e^{-3c}$ SKATTAS AV $e^{-3\hat{c}} = e^{-9/5}$

6 a. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C^c) = (1-0,2) \cdot (1-0,5) \cdot (1-0,6) = 0,16$

b. $X = X_A + X_B + X_C$ DÄR $X_A = \begin{cases} 0 & \text{OM } A^c \text{ INTRÄFFAR} \\ 1 & \text{OM } A \text{ INTRÄFFAR} \end{cases}$ O.S.V. $\Rightarrow$
 $E[X] = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,5 + 0,6 = 1,3$

c. MED BET. SOM I b-DELLEN, X_A , X_B OCH X_C OBEROENDE $\Rightarrow$
 $\text{VAR}[X] = \text{VAR}[X_A] + \text{VAR}[X_B] + \text{VAR}[X_C] = 0,2(1-0,2) + 0,5(1-0,5) + 0,6(1-0,6)$
 $= 0,16 + 0,25 + 0,24 = 0,65$

7. a. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (0,5 \theta e^{-\theta |x_i|}) = 0,5^n \cdot \theta^n \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n |x_i|}$

$\ln L(\theta) = n \ln 0,5 + n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n |x_i|$

$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i|}$ ($n=10$) $\hat{\theta} = \frac{10}{\sum_{i=1}^n |x_i|}$

b. OBSERVANS $\sum_{i=1}^{10} |x_i| = 1,2 + 1,8 + 3,3 + 5,2 + 4,9 + 2,0 + 0,1 + 0,9 + 8,5 + 1,5 = 29,9$
 $\Rightarrow$ (ORAKULUM) $\hat{\theta} = \frac{10}{29,9}$ (2)

8. a. KUNNA OBSERVATIONERNA I FÖLJANDE STÖCKPROVET
 FÖR $x_1, \dots, x_{11}$ OCH DE I FÖLJANDE FÖR $y_1, \dots, y_{15}$,
 UR DESS TVA t-INTERVALLEN

$$\mu_1 = \bar{x} \pm 2,228 \frac{s_x}{\sqrt{11}} \quad (95\%)$$

$$\text{OCH} \quad \mu_2 = \bar{y} \pm 2,145 \frac{s_y}{\sqrt{15}} \quad (95\%)$$

(BYGGER PÅ t-PÅDELENINGAR MED $11-1=10$ RESP $15-1=14$
 FRIDOMSGRADER) KAN VI RÄKNA UT ATT

$$\bar{x} = \frac{13,3 + 15,8}{2} = 14,55 \quad s_x = \frac{\sqrt{11}}{2,228} \left(\frac{158 - 12,3}{2} \right) = 2,6051$$

$$\bar{y} = \frac{6,4 + 11,1}{2} = 8,75 \quad s_y = \frac{\sqrt{15}}{2,145} \left(\frac{11,1 - 6,4}{2} \right) = 4,243$$

DETTA GÖR ATT

$$s_p = \sqrt{s_p^2} = \sqrt{\frac{(11-1) 2,6051^2 + (15-1) 4,243^2}{(11+15-2)}} = \sqrt{13,25} \approx 3,651$$

99% TRÄSTÖCKPROVETS KONFIDENSINTERVALL FÖR Δ

$$\Delta = (\bar{y} - \bar{x}) \pm 2,797 s_p \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{15}} \quad (99\%)$$

(BYGGER PÅ FRIDOMSGRADEN I t-FÖR. = 24.)
 $\Rightarrow$ OBSERVERAT KONFIDENSINTERVALL

$$\Delta = -5,3 \pm 4,053 \quad (99\%)$$

b. VI ANVÄNDER REGELN ATT FÖRKASTA $H_0: \Delta = 0$
 OM OCH ENDAST OM $0 \notin$ KONFIDENSINTER-
 VALLET ($\alpha = 0,01$ SVARAR MOT KONFIDENSGRAD 99%).
 EFTERSOM $0 \notin$ INTERVALLET I Δ -OGEN SÅ
 FÖRKASTAR VI H_0 (TILL FÖRMÅN FÖR ATT $\mu_x > \mu_y$).