Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik TMA321**

Tid: den 28 maj (fm), 2018
Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, egenhändigt skriven formelsamling om två A4 fram och bak (dvs 4 sidor), samt utdelade tabeller.

Tentamen består av 8 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:
betyg "3": 20 till 29 poäng
betyg "4": 30 till 39 poäng
betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade och motiverade. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Antag att det i urna A finns 3 röda och 4 gröna bollar, och att det i urna B finns 2 röda och 5 gröna bollar. Först väljer man en boll slumpmässigt från urna A och lägger den i urna B. Sedan väljer man en boll slumpmässigt från urna B (som nu innehåller 8 bollar), och lägger den i urna A. I det tredje och sista steget drar vi slumpässigt en boll från urna A. Vi antar hela tiden att bollarna i urnorna är väl blandade.

   (a) Vad är sannolikheten att den andra bollen som dras (dvs den från urna B) är grön? (3p)

   (b) Vad är sannolikheten att bollen vi drar i det sista steget är grön? (3p)

2. En djurpark skall köpa in ett parti om 13 fullvuxna flodhästar. Deras leverantör plockar flodhästarna från lämplig flod och väger dom. Vi kan anta att flodhästarnas vikter är oberoende och normalfördelade med parametrar μ, σ^2. De uppmätta vikterna blev:

flodhäst nr:	1	2	3	4	5	6	7
vikt:	2220	1857	1877	2099	2407	1946	2174
flodhäst nr:	8	9	10	11	12	13	
vikt:	2055	2323	1882	2107	2211	2320	

   (a) Hitta ett 95% K.I. för μ om $\sigma = 200$ är känd. (2p)

   (b) Hitta ett 95% K.I. för μ om σ är okänd. (2p)

   (b) Hitta ett 99% K.I. för σ^2. (2p)

3. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = cxe^{\alpha x} \text{ för } 0 \leq x \leq 2,$$

   där parametern $\alpha > 0$.

(a) Bestäm konstanten c. (2p)

(b) Bestäm täthetsfunktionen för $Y = \sqrt{X}$. (2p)

(c) Beräkna $\mathbb{E}[Y^2]$. (2p)

4. Låt X ~Poi(λ) (dvs Poisson fördelad med parameter λ), och betingat på att $X = k$, låt $Y \sim U(\{1, 2, \ldots, k+1\})$ (dvs likformigt fördelad på $1, \ldots, k+1$.).

   (a) Hitta den gemensamma sannolikhetsfunktionen för (X, Y). (2p)

   (b) Hitta marginalsannolikhetsfunktionen för Y. (2p)

   (c) Hitta den betingade sannolikhetsfunktionen för X givet Y. (2p)

   (d) Hitta $\mathbb{E}[X + 1|Y = 1]$. (2p)

5. Antag att $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och likafördelade med fördelning $U[0, \theta]$ där θ är okänt.

   (a) Hitta maximum likelihood skattaren (MLE) för θ. (3p)

   (b) Är din skattare från (a) väntevärdesriktig? Det räcker att du löser denna deluppgift i fallet att $n = 2$. (3p)

6. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av oberoende och likafördelade slumpvariabler. Antag att fördelningen är sådan att

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4} \text{ och } \mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$$

   (a) Bestäm den momentgenererande funktionen för X_1. (2p)

   (b) Använd ditt svar i (a) för att bestämma $\mathbb{E}[X_1^n]$ för varje värde på n. (2p)

   (c) Beräkna $\mathbb{E}[(X_1 + X_2)^n]$ för varje värde på n. Svara på enklast möjliga form. (2p)

7. Alexandra brukar göra sin egen cement. Hon tar då lika delar kalk och stenmineral, som hon sedan bränner under hög temperatur. Efter bränning kan materialet användas för diverse byggnadsarbeten. En viktig egenskap är då torktiden efter att den brända blandningen blandas med vatten. Alexandra testar 8 olika bränntemperaturer, och undersöker sedan motsvarande torktider (alla yttre faktorer såsom utomhustemperatur, mängd tillsatt vatten etc kan anses vara samma för alla experiment). Följande data uppmättes

Temp (C):	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800
Tid (min):	620	594	533	524	475	451	446	448

Alexandra ansatta en linjär regressionsmodell $y = \beta_0 + \beta_1 x$ där x är temperaturen (i C) och y torktiden (i minuter). Data kan sammanfattas med att $S_{xx} = 420000$, $S_{yy} = 32512$ och att $S_{xy} = -111950$. Hjälp Alexandra med följande uppgifter:

(a) Skatta β_0, β_1. (2p)

(b) Skapa ett 99% konfidensintervall för β_1 och testa huruvida $\beta_1 = -0.3$ på 99%-nivån. (2p)

(c) Ange förklaringsgraden och beräkna residualerna. Verkar Alexandras modell rimlig? (2p)

8. Gamma-fördelningen har täthetsfunktion

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \text{ för } x > 0.$$

Denna fördelning har väntevärde α/β och varians α/β^2.

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara i.i.d. Gamma-fördelade enligt ovan angivna täthetsfunktion. Betrakta hypoteserna

$$H_0 : \beta = 20 \text{ och } H_1 : \beta = 25.$$

(a) Sätt upp likelihood ration, och härled ur denna enklaste möjliga test (för hypoteserna H_0, H_1) med tillhörande förkastningsområde. (3p)

(b) Om $n = 57$, bestäm förkastningsområde (RR) motsvarande signifikansnivå 1% för ditt härledda test. Du kan här anta att parametern $\alpha = 4$. (3p)