Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
måndagen den 25/8 2008 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till hands i skrivningssalen omkring 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, lexikon, och formelblad (utdelas).

*******************************************************************************

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Formulera och bevisa Chapman-Kolmogorovs ekvation för Markovkedjor i diskret tid.

2. En partikel gör en slumpvandring mellan hörnen på en kvadrat: den tar ett steg medsols med sannolikheten $2/3$ och ett motsols med sannolikheten $1/3$. Beräkna väntevärdet för antalet steg som tas innan partikeln kommer tillbaka till det hörn den startade ifrån.

3. I två kärl som står i förbindelse med varandra finns totalt $N$ stycken gasmolekyler. Varje molekyl stannar i ett kärl för en tid som är $Exp(1)$-fördelad, därefter flyttar den till det andra. Molekylernas rörelser är oberoende av varandra. Låt $X_t$ vara antalet molekyler i det ena kärlet vid tidpunkten $t \geq 0$. Bestäm den stationära fördelningen för födelse- och dödsprocessen $(X_t)_0^\infty$.

4. Vi betraktar ett $M/M/1$-kösystem, med ankomstintensitet $\lambda$ och betjäningstider som är exponentialfördelade med intensitet 0.5; vi använder minuter för tidsskalan. Vi är angelägna att hålla nere kölängden, och önskar att den förväntade tiden i kön för en kund inte skall överstiga 0.3, under stationära förhållanden. Vilket är det högsta värde på $\lambda$ som är förenligt med detta krav?

5. Vi betraktar en irreducibel och stationär Markovkedja med tillståndsrum $E = \{0, 1, \ldots\}$. Beteckna den stationära fördelningen med $(\pi_i)_0^\infty$. Visa att $\pi_i > 0$ för alla $i \in E$.

6. De stokastiska variablerna $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och $Exp(\lambda)$-fördelade. Bestäm $E[max(X_1, \ldots, X_n)]$.

**FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!**

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 25/8 2008.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se Sats 3.1 i kompendiet.

2. Numrera kvadratens hörn medsols med 1, 2, 3 och 4. Vi använder idén i Sats 3.4 i kompendiet, men låter $t_i, i = 2, 3, 4$, vara väntevärdet för antalet steg från hörn $i$ till hörn 1, där vi antar partikeln startat. Vi får evationssystemet $t_2 = 1 + (2/3) \cdot t_3, t_3 = 1 + (1/3) \cdot t_2 + (2/3) \cdot t_4$, och $t_4 = 1 + (1/3) \cdot t_3$. Detta löses lätt: $t_2 = 17/5, t_3 = 18/5, t_4 = 11/5$, och vi får att det sökta väntevärdet $= 1 + (2/3) \cdot t_2 + (1/3) \cdot t_4 = \mathbf{4}$.

3. Med sedvanliga beteckningar för födelse- och dödsintensiteter får vi: $\lambda_n = (N-n)$, $\mu_n = n$ för $0 \leq n \leq N$. Låt $(\pi_n)_0^N$ vara den stationära fördelningen. Standardformeln ger: $\pi_n = (N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)/1 \cdot 2 \cdots n) \cdot \pi_0 = \binom{N}{n} \cdot \pi_0$. Detta ger nu lätt att $(\pi_n)_0^N$ är $Bin(N, 1/2)$-fördelningen.

4. Detta är Problem 61 i kompendiet.

5. Antag att det för tillståndet $j$ gäller att $\pi_j = 0$. Tag ett tillstånd $i$ sådant att $\pi_i > 0$; ett sådant måste finnas eftersom $\sum \pi_k = 1$. Eftersom kedjan är irreducibel finns ett $n$ sådant att $p_{ij}^{(n)} > 0$. Vi får, eftersom $\pi = \pi P^n$, att $0 = \pi_j = \sum \pi_k \cdot p_{kj}^{(n)} \geq \pi_i \cdot p_{ij}^{(n)} > 0$. En motsägelse, och vi är klara.

6. Låt variablerna i storleksordning betecknas med $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, och låt $X_{(0)} = 0$. Med användning av Exp-fördelningens glömskeegenskap, och att minimum av oberoende Exp-fördelade variabler är Exp-fördelad med intensitet $=$ summan av de ingående variablernas intensiteter, får vi att $X_{(i)} - X_{(i-1)}$ är $Exp(\lambda(n - i + 1))$-fördelad för $i = 1, \ldots, n$. Detta ger att det sökta väntevärdet är $= (1/n + 1/(n - 1) + \ldots + 1/2 + 1)/\lambda$.
   Man kan även få fram detta via fördelningsfunktionen för maxvärdet, men det blir tyngre.