Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
måndagen den 15/1 2007 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118.
Lärare till förfogande i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Tre svarta och tre vita bollar är fördelade i två urnor, I och II, alltid med tre i varje. Vi gör successiva dragningar enligt följande: en boll tas ur urna I och en ur II, och de byter urna. Låt X_n = antalet svarta bollar i urna I efter n sådana dragningar. Bestäm övergångsmatrisen för Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$, och dess stationära fördelning.

2. Impulserna i ett system ges av en Poissonprocess med intensitet λ. Låt $0 < T_1 < T_2 < T_3 \ldots$ vara tidpunkterna för impulserna. Bestäm täthetsfunktionen för T_2.

3. Formulera och bevisa Kolmogorovs framåtekvation för en Markovkedja $(X_t)_0^\infty$ i kontinuerlig tid med ändligt utfallsrum.

4. En kortlek innehåller N stycken kort, märkta $1, 2, \ldots, N$. Den "blandas" på följande sätt: ett kort väljs på måfå (sannolikheten $= 1/N$ för varje kort, alltså), och läggs överst. Låt X_n = läget för kort nr 1 efter n sådana platsbyten; med "läget" avses var i leken kortet befinner sig, räknat uppifrån. Ange övergångsmatrisen för Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$. Bestäm den stationära fördelningen; det finns en naturlig kandidat för denna, det räcker med att bekräfta att den är den rätta.

5. Vi betraktar ett $M/M/c$-system som inte har någon kö: en anländande kund som finner att alla de c betjäningsstationerna upptagna går förlorad (därav namnet "förlustsystem"). Bestäm sannolikheten att detta händer under stationära förhållanden, d.v.s. bestäm π_c i den stationära fördelningen $(\pi_j)_0^c$.

6. Låt $p_{ij}^{(n)}$, $i, j \in E$ beteckna övergångssannolikheterna i n steg för en Markovkedja med ändligt tillståndsrum E. Antag att det finns tal $\alpha_j, j \in E$, sådana att $p_{ij}^{(n)} \to \alpha_j$ då $n \to \infty$, för alla $i, j \in E$. Visa att $(\alpha_j)_{j\in E}$ är en stationär fördelning till Markovkedjan.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 15/1 2007.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Vi får med lite eftertanke att
   $p_{01} = 1$
   $p_{10} = 1/9, p_{11} = 4/9, p_{12} = 4/9$
   $p_{21} = 4/9, p_{22} = 4/9, p_{23} = 1/9$
   $p_{32} = 1.$

   Ekvationen $\pi = \pi P$ ger att den stationära fördelningen $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_3)$ är $(1/20, 9/20, 9/20, 1/20)$.

2. Se kompendiet, Sats 6.4.

3. Se kompendiet, sid. 53-54.

4. Vi får att för
   $i = 1, 2, \ldots, N$ gäller $p_{i1} = 1/N$,
   $i = 1, 2, \ldots, (N-1)$ gäller $p_{i,i+1} = (N-i)/N$,
   $i = 2, 3, \ldots, N$ gäller $p_{ii} = (i-1)/N$.

   Den likformiga fördelningen $(1/N, \ldots, 1/N)$ löser ekvationen $\pi = \pi P$; det fås med direkt prövning.

5. Se kompendiet, avsnitt 7.3.4.

6. Vi skall visa att $\alpha = \alpha P$, där $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$; N är antalet element i E. Chapman-Kolmogorov ger, för alla par i, j, att $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_1^N p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}$. Låt $n \to \infty$; det gör med förutsättningen i uppgiften att för alla j har vi $\alpha_j = \sum_1^N \alpha_k \cdot p_{kj}$, och vi är klara.