Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
fredagen den 30/5 2008 kl. 08.30-13.30 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till förfogande i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. En partikel gör en slumpvandring mellan hörnen på en regelbunden femhörning: den går alltid till ett av de två närmsta, med sannolikheten $1/2$ för vardera möjligheten. Vi numrerar hörnen med 1, 2, 3, 4 och 5 medsols. Antag partikeln befinner sig i hörn 1 vid tidpunkten 0. Bestäm sannolikheten att den återvänder dit utan att ha träffat hörn 4.

2. Till vardera ingången till en biltunnel som är 1 km lång anländer bilar enligt två oberoende Poissonprocesser med lika stora intensiteter: 1 bil/minut. Bilarna kör alla med hastigheten 60 km/tim. Bestäm sannolikheten att det vid en viss tidpunkt finns högst 3 bilar i tunneln.

3. Vi betraktar en slumpvandring på mängden $\{0, 1, 2, \ldots\}$, i den tas ett steg till höger med sannolikheten $p, 0 < p < 1$, och ett till vänster med sannolikheten $q = 1 - p$, med undantag för tillståndet 0: där stannar den i stället med sannolikheten q. För vilka p finns en stationär fördelning, och hur ser den ut? Är denna Markovkedja ergodisk för dessa p?

4. Vi studerar ett M/M/1-kösystem, dock med avvikelsen från standardmodellen i att vi har köaversion: en kund som anländer till systemet med n kunder ansluter sig med sannolikheten $p_n > 0$, där $p_n \to 0$ då $n \to \infty$. Visa att det alltid existerar en stationär fördelning för födelse- och dödsprocessen $X_t, t \geq 0$, där X_t är antalet kunder i systemet vid tiden $t \geq 0$.

5. Redogör för hur man med kopplingmetoden kan bevisa ergodicitet för en Markovkedja som är irreducibel, aperiodisk, och med ändligt tillståndsrum.

6. Vi analyserar en on-off-process, d.v.s. en Markovprocess med tillståndsrummet $\{0, 1\}$. Låt denna ha övergångsintensiteter $q_{01} = \lambda_0, q_{10} = \lambda_1$. Använd Kolmogorovs framåtekvation för att exakt bestämma $p_{00}(t), t \geq 0$, i termer av λ_0 och λ_1.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI fredagen den 30/5 2008.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. För $i = 1, 2, 3, 4, 5$, låt $T_i = min\{n \geq 1; X_n = i\}$ där X_n är partikelns läge efter n steg. Låt $a_j = P(T_1 < T_4 | X_0 = j)$; vi söker a_1. Den vanliga metoden med betingning m.a.p. X_1 ger ekvationerna $a_1 = (1/2) \cdot (a_2 + a_5)$,
$a_2 = 1/2 + (1/2) \cdot a_3, a_3 = (1/2) \cdot a_2, a_5 = 1/2$. Vi får lätt att $a_1 = \mathbf{7/12}$.

2. Antalet bilar i tunneln vid en viss tidpunkt är summan av två oberoende Poissonfördelade variabler med parameter 1, eftersom bilarna kör med hastigheten 1 km/min. Denna summa är Poissonfördelad med parameter 2, så den sökta sannolikheten är $\sum_0^3 e^{-2} \cdot 2^i/i! = \mathbf{0.86}$.

3. Se Exempel 5.5, sid. 41-43, i kompendiet.

4. Låt λ och μ vara intensiterna för ankomster och betjäningar, respektive. I vårt modifierade $M/M/1$-system får vi födelseintensiter $\lambda_n = np_n$ för $n \geq 0$. Dödsintensiteterna är alla $= \mu$. Vi vet att om $\sum_0^\infty \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/\mu_1 \cdots \mu_n < \infty$, så har vi en stationär fördelning. För att visa denna konvergens, tag n_0 så stort att $\lambda_n = \lambda p_n/\mu \leq \frac{1}{2}$ för $n \geq n_0$. Det är nu lätt att dominera $\sum_{n_0}^\infty \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/\mu^n$ med (en konstant) $\cdot \sum_0^\infty (\frac{1}{2})^n$, därmed är vi klara.

5. Se sid. 34-36 i kompendiet.

6. Kolmogorovs framåtekvation ger: $p'_{00}(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) + \lambda_1 p_{01}(t)$
$= -p_{00}(t)(\lambda_0 + \lambda_1) + \lambda_1$. Förkorta $p_{00}(t)$ till $f(t)$ och $\lambda_1 + \lambda_0$ till α, för enkelhetens skull. Vi har alltså differentialekvationen $f'(t) = -\alpha f(t) + \lambda_1$, vilket ger $(f(t)e^{\alpha t})' = \lambda_1 e^{\alpha t}$, som i sin tur ger (obs: $f(0) = 1$) $f(t)e^{\alpha t} - 1 = (\lambda_1/\alpha)(e^{\alpha t} - 1)$. Vi kan konkludera:
$p_{00}(t) = \lambda_1/(\lambda_0 + \lambda_1) + (\lambda_0/(\lambda_0 + \lambda_1))e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}$.