Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
fredagen den 27/10 2006 kl. 08.30-13.30 i M-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller hem 242118.
Lärare till förfogande i skrivsalen c:a 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, och formelblad (utdelas).

****

Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. En Markovkedja har tillståndsrum $\{0,1\}$ med övergångssannolikheter $p_{00} = p_{11} = 3/4$ och $p_{01} = p_{10} = 1/4$. Visa att $p_{00}^{(n)} = 1/2 + (1/2)^{n+1}$ gäller för alla $n = 0, 1, \ldots$.

2. Till ett $M/M/1$-system ankommer kunder med intensiteten 3 per minut. Hur stor måste betjäningsintenstiteten vara för att $P(X_t \geq 3)$ inte skall överstiga 0.2? Här är X_t antalet kunder i systemet vid tidpunkten t; stationära förhållanden råder.

3. De stokastiska variablerna $X_0, X_1, \ldots$ är oberoende och likafördelade, och antar värden $0, 1, \ldots$ med sannolikheter $p_0, p_1, \ldots$.
Låt $M_n = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ för $n \geq 0$. Visa att $M = (M_n)_0^\infty$ är en Markovkedja, och bestäm dess övergångssannolikheter.

4. Vi gör en slumpvandring i diskret tid mellan hörnen på en regelbunden femhörning, med sannolikheten $p, 0 < p < 1$, att ta ett steg medsols och sannolikheten $q = 1 - p$ ett steg motsols. Visa noga att oberoende av var vi startar så kommer vi efter ett stort antal steg befinna oss i ett visst hörn med sannolikheten $\approx 1/5$.

5. Vi studerar den födelse- och dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_i = \lambda$ för $i \geq 0$ och dödsintensiteter $\mu_i = i \cdot \mu$ för $i \geq 1$ som används som modell för en telefonväxel med obegränsat antal utgående linjer ($M/M/\infty$-systemet). Här är λ intensiteten för tillströmningen av samtal, och μ parametern i den exponentialfördelning som bestämmer samtalens längd. Visa att processen alltid har en stationär fördelning, och bestäm denna.

6. Låt $Y_{-1}, Y_0, Y_1, \cdots$ vara oberoende och likafördelade 0-1-variabler med $P(Y_i = 1) = p$ där $0 < p < 1$, och låt $X_n = \max(Y_{n-1}, Y_n)$ för $n \geq 0$. Visa att sekvensen $X_0, X_1, \cdots$ inte har Markovegenskapen.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI fredagen den 27/10 2006.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Det naturliga är att visa påståendet med hjälp av induktion; använd att $p_{00}^{(n+1)} = p_{00}^{(n)} \cdot (3/4) + p_{01}^{(n)} \cdot (1/4)$
$= p_{00}^{(n)} \cdot (3/4 - 1/4) + 1/4 = p_{00}^{(n)} \cdot (1/2) + 1/4.$

2. Låt μ beteckna betjäningsintensiteten, och ρ $(= \lambda/\mu)$ trafikintensiteten. Under stationära förhållanden vet vi att $P(X_t = i) = (1-\rho)\rho^i, i = 0, 1, \ldots,$ vilket innebär att $P(X_t \geq i) = \rho^i$. Vi skall ha $\rho^3 \leq 0.2$. Med $\lambda = 3$ fås att det minsta värde på μ som ger önskat resultat är **5.13**.

3. Vi får $P(M_{n+1} = j | M_0 = i_0, \ldots, M_{n-1} = i_{n-1}, M_n = i)$
$= P(max(M_n, X_{n+1}) = j | M_0 = i_0, \ldots, M_n = i)$
$= P(max(i, X_n) = j)$
vilket är
$= 0$ om $j < i$,
$= \sum_0^i p_k$ om $j = i$, och
$= p_j$ om $j > i$.

4. Att den stationära fördelningen är den likformiga fås lätt genom att lösa ekvationen $\pi = \pi P$, så om villkoren för ergodicitet är uppfyllda får vi att uppgiftens påstående håller. Tillståndsrummet är ju ändligt, och slumpvandringen är verkligen irreducibel och aperiodisk. Obs, det sistnämnda får man motivera; en slumpvandring mellan hörnen på en kvadrat är periodisk!

5. Formeln $\pi_i = (\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{(i-1)}}{\mu_1 \cdots \mu_i}) \cdot \pi_0$ ger $\pi_i = (\frac{\lambda^i/\mu^i}{i!}) \cdot \pi_0$, och vi får att den stationära fördelningen är Poissonfördelningen med parameter λ/μ.

6. Vi finner: $P(X_2 = 1 | X_0 = 0, X_1 = 1) = 1$, men $P(X_2 = 1 | X_1 = 1) < 1$.