Tentamensskrivning för kursen MARKOVTEORI
fredagen den 29/5 2009 kl. 08.30-13.30 i V-huset.
Lärare: Torgny Lindvall. Telefon ankn. 3574 eller mobil 0705-987486.
Lärare till hands i skrivningssalen omkring 10.00 och 11.45.
Hjälpmedel: typgodkänd kalkylator, lexikon, och formelblad (utdelas).

****
Fullt nöjaktigt löst uppgift ger 5 poäng.

1. Formulera och bevisa Chapman-Kolmogorovs ekvation för Markovkedjor i diskret tid.

2. En partikel rör sig mellan de tre hörnen i en triangel enligt en Markovkedja i kontinuerlig tid; vi numrerar hörnen med 1, 2 och 3. Alla de sex möjliga övergångsintensiteterna är lika: $q_{12} = q_{13} = \ldots = \lambda > 0$. Beteckna partikelns läge vid tidpunkten t med X_t. Antag $X_0 = 1$. Bestäm $E[T]$, där T är tiden för första träff av tillstånd 3 (alltså: $T = \min\{s; X_s = 3\}$).

3. Till ett stationärt $M/M/1$-system kommer kunder med intensitet λ, och betjäningsintensiteten är 0.5 (vi mäter i minuter). Vilket är det största värde på λ för vilket den förväntade tiden i systemet för en kund inte överskrider 5 minuter?

4. En partikel gör en slumpvandring i diskret tid mellan hörnen i en femhörning: den tar ett steg medsols med sannolikheten $p, 0 < p < 1$, och ett motsols med sannolikheten $1 - p$. Numrera hörnen med 1, 2, 3, 4 och 5 medsols, och låt X_n beteckna partikelns läge efter n steg.
Bestäm $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2, X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4)$; det kvittar var vi startar.

5. Ett referensbibliotek består av N böcker, märkta $1, 2, \ldots, N$, och de står på en hylla med platser märkta $1, 2, \ldots, N$ från vänster till höger. Biblioteket används enligt följande: bok nummer j efterfrågas med sannolikheten $p_j > 0$, och valen av böcker är oberoende av varandra. En bok som efterfrågas tas ned från hyllan, läses, och ställs tillbaka på plats 1. Låt X_n = konfigurationen av böcker på hyllan efter n användningar av biblioteket. Ange allt du kommer på rörande Markovkedjan $(X_n)_0^\infty$! Börja lämpligen med att finna rätt tillståndsrum. Ekvationen för stationär fördelning blir ganska komplicerad, den behöver inte lösas.

6. Härled Erlangs förlustformel för ett $M/M/c$-system utan kö.

FÖR KORTFATTADE LÖSNINGAR: V.G. VÄND!

Kortfattade lösningar till MARKOVTEORI måndagen den 29/5 2009.
Lärare: Torgny Lindvall.

---

1. Se kompendiet, Sats 3.1.

2. Se kompendiet, Sats 6.5. Vi gör tillstånd 3 absorberande, och får $t_1 = 1/(2\lambda) + (1/2)t_2$. P.g.a. symmetri har vi $t_1 = t_2$, så $\mathbf{t_1 = 1}/\lambda$.

3. Se kompendiet, Sats 7.5. Vi använder formeln $\omega = 1/(\mu(1-\rho))$, och ser att det sista uttrycket $= 1/(\mu - \lambda)$. Med $\mu = 1/2$ blir detta $2/(1-2\lambda)$, och om detta skall var ≤ 5 så måste vi ha $\lambda \leq 0.3$. Det största möjliga värdet på λ är alltså **0.3**.

4. Vi ser att $(X_n)_0^\infty$ är ergodisk (ty: ändligt tillståndsrum, aperiodisk och irreducibel). Den stationära fördelningen är den likformiga på de fem tillstånden. Vi har $P(X_n = 2, X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4)$
$= P(X_{n+1} = 3, X_{n+2} = 4 | X_n = 2) = p^2 \cdot P(X_n = 2)$, och detta konvergerar mot $(1/5) \cdot p^2$ när $n \to \infty$.

5. Som tillståndsrum E tar vi mängden av permutationer $i = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$ av $1, 2, 3, \ldots, N$. Kedjan har övergångssannolikheter $p(i,j)$ för $i = (i_1, \ldots, i_N)$ och $j = (j_1, \ldots, j_N)$ enligt följande:
   $p(i,i) = p_{i_1}$
   $p(i,j) = p_{i_2}$ för $j = (i_2, i_1, i_3, \ldots, i_N)$
   $p(i,j) = p_{i_3}$ för $j = (i_3, i_1, i_2, i_4, \ldots, i_N)$
   o.s.v. till
   $p(i,j) = p_{i_N}$ för $j = (i_N, i_1, \ldots, i_{N-1})$.

   Kedjan är aperiodisk och irreducibel, och eftersom E är ändligt så är den därmed ergodisk. Ekvationen $\pi = \pi P$ för den stationära fördelningen är inte omöjlig att bemästra, ty alla $p(i,j)$ i ekvationen $\pi_i = \sum \pi_j \cdot p(j,i)$ är lika för ett $i = (i_1, \ldots, i_N)$, nämligen $= p_{i_1}$. Men att lösa ut π explicit tar lite för lång tid för detta tillfälle.

6. Se kompendiet, sid. 94.