

Svar till några av uppgifterna i kapitel 4.

4.14 a) $p_Y(y) = y/21$, $y = 1, 2, \dots, 6$.

b) $\mu_Y = E[Y] = \frac{691}{21}$ $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \frac{20}{9}$.

- 4.16 a) X = första decimalen i ett tal i företagets arkiv. Vill beräkna sannolikheten att första decimalen i ett slumpmässigt valt tal ur företagets arkiv är en 1:a.

$$P(X = 1) = P_X(1) = \log_{10}(1 + 1/1) = \log_{10}(2) = 0,301$$

enligt Benfords fördelning.

- b) Y = antalet tal bland 1000 st som har första decimalen en 1:a. Vi vet från a) att sannolikheten att första decimalen är en 1:a är 0.301. Y följer en binomialfördelning eftersom Y är antal lyckade försök bland 1000 ($=n$) och sannolikheten att ett försök lyckas är 0.301 ($=p$). För att använda binomialfördelningen skall händelserna även vara oberoende. I uppgiftstexten anges att man dragit ett stickprov och stickprov skall tas på ett sådant sätt att observationerna är oberoende.
- c) Om talen följer Benfords fördelning kommer vi få att Y är binomialfördelad enligt b) med $p=0.301$. I så fall kan vi räkna ut sannolikheten att få färre än eller lika med 258 tal med första decimalen en 1:a. Om denna sannolikhet är liten så tror vi inte på att talen verkligen följer Benfords fördelning.

$$P(Y \leq 258) = \sum_{y=0}^{258} \binom{1000}{y} p^y (1-p)^{1000-y} = 0,0015.$$

Detta beräknas med hjälp av MINITAB eftersom det blir jobbigt att göra det för hand. Ett alternativ sätt att räkna är att göra en normalapproximation av binomialfördelningen (har $np = 1000 \cdot 0,301 = 301 \geq 10$ och $np(1-p) = 699 \geq 10$ så det går bra) enligt följande,

$$\begin{aligned} P(Y \leq 258) &= P\left(\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{258,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= P(Z \leq -2,93) = 0,0017. \end{aligned}$$

Anledningen till att 258 blivit 258,5 finns förklarat i exempel 4.21. Det är alltså väldigt liten sannolikhet att vi skulle observera 258

eller färre tal bland 1000 som har första decimalen en 1:a. Ytterligare ett sätt att beräkna denna sannolikhet skulle kunna vara genom att approximera binomialfördelningen med en Poissonfördelning, men tyvärr är förutsättningarna för att få göra detta ej uppfyllda ($np \leq 20$ är inte sant).

4.36 Låt Y vara bussens ankomsttid i minuter efter 7.00.

- a) Likformig (uniform) fördelning som har massfunktion $p_Y(y) = 1/15$ för $0 \leq y \leq 15$.
 $P(Y > 5) = \frac{2}{3}$.
- b) Enligt Centrala gränsvärdessatsen är $\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ approximativt $N(0, 1)$ fördelad för stora n . Här är $\mu = 7,5$ min och $\sigma = 15/\sqrt{12} = 4,74$ min.

4.42 Låt W = vikten av en kolv.

- a) Låt w_o vara den efterfrågade vikten. Vet att $P(W > w_o) = 0,025$. Måste standardisera för att kunna använda normalfördelningstabellen i boken.

$$\begin{aligned} 0,025 &= P(W > w_o) = P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} > \frac{w_o - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(Z > \frac{w_o - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{w_o - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(Z \leq \frac{w_o - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

där Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.
D.v.s.

$$\Phi\left(\frac{w_o - \mu}{\sigma}\right) = 0,975.$$

Ur tabell på sidan 903 avläses $\Phi(1,96) = 0,975$. Alltså är

$$\frac{w_o - \mu}{\sigma} = 1,96 \Rightarrow w_o = 10,4.$$

b)

$$\begin{aligned}P(\text{kolv inte kan säljas}) &= P(W \leq 9,8 \cup W > 10,4) = \\&= P(W \leq 9,8) + P(W > 10,4) = \\&= P(W \leq 9,8) + (1 - P(W > 10,4)) = \\&= \{\text{standardisera}\} = \\&= \Phi\left(\frac{9,8 - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{10,4 - \mu}{\sigma}\right) = \\&= \Phi(1) + 1 - \Phi(2) = 0,1587 + 1 - 0,9772 = \\&= 0,1815.\end{aligned}$$

4.50 För ett rättvist mynt är antal krona (X) av 1000 kast binomialfördelad med $n = 1000$ och $p = 1/2$.

$$P(X \geq 560) \approx 0,$$

beräknat med normalapproximation så myntet är förmodligen inte rättvist.