TMS136

Föreläsning 2

Slumpförsök

- Med *slumpförsök (random experiment)* menar vi försök som upprepade gånger utförs på samma sätt men som kan få olika utfall
- Enkla exempel är slantsingling och tärningskast

Utfallsrum

- *Utfallsrum (sample space)* är mängden av alla möjliga utfall för ett slumpförsök. Vi betecknar utfallsrummet S

- Vid slantsingling är utfallsrummet

$$S = \{Krona, Klave\}$$

- Vid tärningskast är utfallsrummet

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Kontinuerliga och diskreta utfallsrum

- Vi säger att utfallsrummet är *diskret (discrete)* om vi kan skapa en lista (möjligen oändligt lång) av de möjliga utfallen

- Vi säger att utfallsrummet är *kontinuerligt (continuous)* om det innehåller ett intervall (ändligt eller oändligt) av de reella talen

Exempel

- När vi singlar slant eller kastar tärning är utfallsrummet diskret

- Om vi knäcker en 15 cm lång penna kan brottpunkten hamna var som helst mellan 0 och 15 cm (i alla fall om vi tänker oss att vi kan mäta hur noggrant som helst) och därmed är utfallsrummet kontinuerligt

Händelse

- En *händelse (event)* är en delmängd (subset) av utfallsrummet

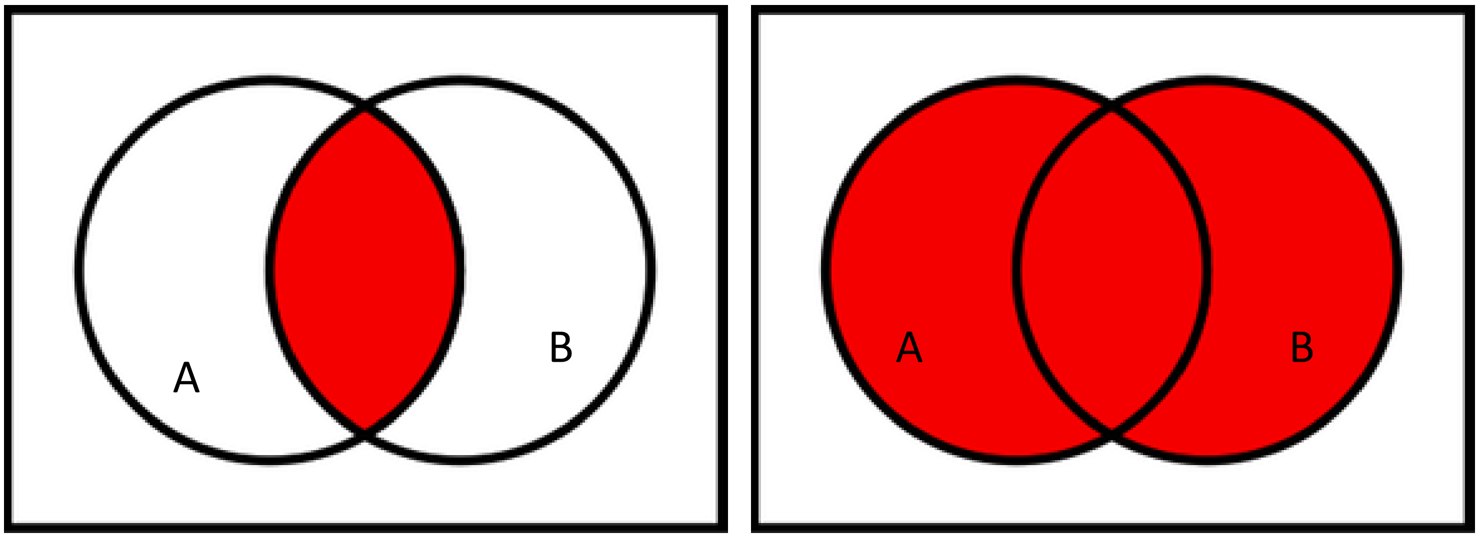
- Vi tärningskast har vi till exempel händelsen ”udda” $\{1,3,5\}$

- När vi knäcker pennan har vi till exmpel händelsen att brottpunkten hamnar mellan tre och sju cm $\{(3,7)\}$

Operationer på mändger/event

- För två händelser A och B introducerar vi operationerna:
- *Union* $A \cup B$ som betyder att A eller B eller båda inträffar (när vi säger ”eller” menar vi inte ”antingen eller”)
- *Snitt (intersection)* $A \cap B$ som betyder att både A och B inträffar

Venn-diagram

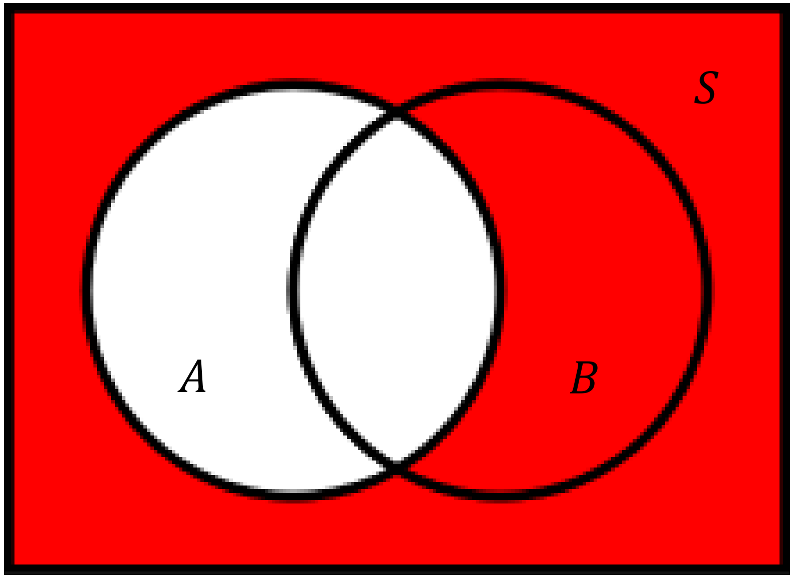


$A \cap B$ är röd

$A \cup B$ är röd

Komplement

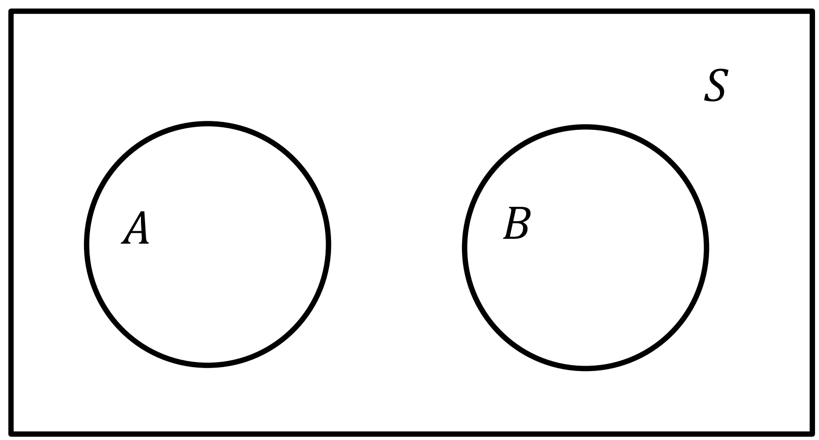
- *Komplementet (the complement)* A' till en händelse A är händelsen att A inte inträffar



A' är röd

Disjunkta eller ömsesidigt uteslutande händelser

- Om ”snittet är tomt” skriver vi $A \cap B = \emptyset$ och säger att A och B är *disjunkta* eller *ömsesidigt uteslutande* (*disjoint* or *mutually exclusive*)



- Om så är fallet kan alltså inte A och B inträffa ”samtidigt”
- Observera att $A \cap A' = \emptyset$ alltid!

Sannolikheter

- För en händelse E skriver vi sannolikheten att E inträffar som

$$P(E)$$

- För en händelse E skriver vi sannolikheten att E inte inträffar som

$$P(E')$$

Exempel

- Låt E vara händelsen att en tärning visar fler än fyra prickar. Då är

$$P(E) = \frac{1}{3} \text{ och } P(E') = \frac{2}{3}$$

Sannolikheter

- För händelserna A och B skriver vi sannolikheten att åtminstone en av dem inträffar som

$$P(A \cup B)$$

- För händelserna A och B skriver vi sannolikheten att båda inträffar som

$$P(A \cap B)$$

Exempel

- Låt A vara händelsen att tärningen visar tre eller fler prickar och B vara händelsen att tärningen visar en prick. Då är

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{ och } P(A \cap B) = 0$$

Sannolikhetsaxiomen

- Grundstenarna på vilka sannolikhetsteorin byggs kallas *sannolikhetsaxiomen*

- $P(S) = 1$

- $0 \leq P(A) \leq 1$

- Om $A \cap B = \emptyset$ så $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Följder av axiomen

- $P(A') = 1 - P(A)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Om A är en delmängd av B så $P(A) \leq P(B)$

- Det är en bra övning att verifiera dessa samband utifrån axiomen och grafiskt m h a Venn-diagram!

Exempel

- Sannolikheten att det regnar idag är 0.6, därför är sannolikheten att det inte regnar 0.4

- Sannolikheten att tärningen visar udda eller större än 3 är 1/2+1/2-1/6=5/6

- Sannolikheten att tärningen visar mindre än 3 är 1/3 och sannolikheten att den visar mindre än 4 är 1/2

Flera händelser

- Sambandet $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kallas ibland *additionsregeln* och kan generaliseras till att gälla fler än två händelser

- För tre händelser A, B, C får man (Venn-diagram) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Exempel

- Mattias är i sportaffären. Slh att han köper ett par sockar är 0.7, slh att han köper ett par skor är 0.3, slh att han köper en boll är 0.2, slh att han köper både sockar och skor är 0.25, slh att han köper både sockar och boll är 0.15, slh att han köper både skor och boll är 0.12 och slh att han köper alla tre grejerna är 0.05. Vad är slh att han köper åtminstone en av grejerna?

Exempel forts.

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0.7 + 0.3 + 0.2 - 0.25 - 0.15 - 0.12 + 0.05$$
$$= 0.73$$

Ömsesidigt uteslutande eller disjunkta händelser

- Om det för händelserna $E_1, \ldots, E_k$ gäller att $E_i \cap E_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$ gäller även att

$$P(E_1 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + \cdots + P(E_k)$$

- Speciellt har vi (obs att ∩ ”binder hårdare” än ∪)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B \cup A \cap B') \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \end{aligned}$$

Betingad sannolikhet

- I vissa sammanhang påverkas sannolikheten för en viss händelse av en annan händelse

- För två händelser A och B ges den *betingade sannolikheten (conditional probability)* för ”A givet B” av

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Vi kan tänka på detta som att vi reducerar utfallsrummet till händelsen B

Exempel

- Vi ser från exemplet om Mattias i sportaffären att om nu A är ”köpa sockar”, B är ”köpa skor” (och C är ”köpa boll”) har vi att sannolikheten att Mattias köper ett par sockar givet att han köper ett par skor är

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.3} \approx 0.83$$

Bayes sats

- Bayes sats (följer ur definitionen av betingad slh)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Sannolikheten att Mattias köper ett par skor givet att han köper ett par sockar kan alltså beräknas som

$$P(B|A) = \frac{\left(\frac{0.25}{0.3}\right) \cdot 0.3}{0.7} \approx 0.36$$

- Observera att det räcker att veta $P(A|B)$…

Total sannolikhet

- Observera att man med hjälp av betingad sannolikhet kan skriva

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B') \end{aligned}$$

- Om det för händelserna $E_1, \ldots, E_k$ gäller att $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ och $E_i \cap E_j$ för alla $i \neq j$ kan vi skriva

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_1) + \cdots + P(A \cap E_k) \\ &= P(A|E_1)P(E_1) + \cdots + P(A|E_k)P(E_k) \end{aligned}$$

Bayes sats för flera händelser

- Om det för händelserna $E_1, \dots, E_k$ gäller att $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ och $E_i \cap E_j$ för alla $i \neq j$ har vi för händelsen A med $\mathrm{P}(A) > 0$ att

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A|E_1)P(E_1) + \cdots + P(A|E_k)P(E_k)}$$

Oberoende händelser

- Två händelser A och B är *oberoende (independent) om*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Låt A vara händelsen en tärning visar 6 i första kastet och B vara det andra kastet blir en sexa.

- Då är $P(A \cap B) = 1/36$ (ett av 36 möjliga utfall) och $P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1/36$

Oberoende händelser

- Definitionen $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ är ekvivalent med (de ekvivalenta sambanden)

$$P(A|B) = P(A) \text{ och } P(B|A) = P(B)$$

- Övning: Visa att $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ger att $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

Observation

- Om $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$ och $A \cap B = \emptyset$ så kan inte A och B vara oberoende

$$P(A \cap B) = 0 \text{ men } P(A)P(B) > 0$$

- Om $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$ och A och B är oberoende så kan det inte gälla att $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$$

Slumpvariabler eller stokastiska variabler

- En *stokastisk variabel (random variable)* X är en funktion från utfallsrummet till de reella talen

$$X: S \to \mathbb{R}$$

- Till exempel kan vi låta X vara förtjänsten i ett spel med slansingling där du vinner \$1 om myntet visar krona och förlorar \$1 om myntet visar klave

Stokastiska variabler

- I slantsinglingsspelet har vi att

$$P(X = 1) = P(X = -1) = 0.5$$

- I slantsinglingsspelet är X *diskret* eftersom X tar värden i en diskret mängd (enstaka punkter)

- En stokastisk variabel kallas *kontinuerlig* om den värden i ett intervall

Exempel

- Kontinuerliga: Elektrisk strömstyrka, längd, tryck, temperatur, tid...

- Diskreta: Antal bilar på en bro vid en viss tidpunkt, andelen defekta enheter i ett begränsat parti av produkter, antalet ettor bland hundra tärningskast...

- Man bör observera att man till exempel för elektrisk strömstyrka troligen har en viss mätnoggrannhet hos sin ampere-mätare och att detta borde göra strömstyrkan diskret. Men troligen kan instrumentet visa så många olika värden att det är behändigare att betrakta strömstyrkan som kontinuerlig...