

Lösningar till tenta i TMS136, 2009-10-24.

1. a) $S = \{\text{möjliga utfall från ett slumpförsök}\}$

b) $E \subseteq S$

c) $X: S \rightarrow \mathbb{R}$

2. $P(\text{man får färg}) = 4 \cdot \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

3. Kasta ett mynt 2 ggr och sätt: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{om inte kastet} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

och $Y = X_1 + X_2$. Då är

a) $f(X_1, Y) \in (0, 1)$ (stort $X_1 \Rightarrow$ stort Y men Y ej helt bestämt av X_1 .)

b) $f(X_1, -X_1) = -1$ (stort $X_1 \Rightarrow$ litet $-X_1$ och $-X_1$ helt bestämt av X_1 .)

c) $f(X_1, X_2) = 0$ ty kasten oberoende.

4. $f(x) = cx^2 + 1/2$, $0 \leq x \leq 1$.

a) $1 = \int_0^1 cx^2 + 1/2 dx = \left[\frac{cx^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$.

b) $E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 x(cx^2 + 1/2) dx =$

$= \int_0^1 cx^3 + \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{cx^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{c}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

c) $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \left[\frac{3}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{28}{60}$

$\Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{28}{60} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 0,076$

$$⑤ \quad X \sim \text{Ber}(p), \quad f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x=0 \text{ eller } 1$$

$$\begin{aligned} a) \quad L(p) &= p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n} (1-p)^{1-x_n} = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-p)$$

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{(-1)}{(1-p)} (n - \sum_{i=1}^n x_i) = 0$$

$$\text{om} \quad \frac{1-p}{(1-p)p} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{p}{(1-p)p} (n - \sum_{i=1}^n x_i) = 0$$

$$\text{om} \quad \sum_{i=1}^n x_i - \cancel{p \sum_{i=1}^n x_i} - np + \cancel{p \sum_{i=1}^n x_i} = 0$$

$$\text{om} \quad p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\therefore \text{MLE}(p) = \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$b) \quad E(\hat{p}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p$$

$$c) \quad \text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i) = \left\{ \begin{array}{l} x_i \text{ uafhængige!} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$6. \quad X \sim N(150, 25) \quad N(0,1)$$

$$a) \quad P(X \leq 145) = P\left(\frac{X-150}{\sqrt{25}} \leq \frac{145-150}{\sqrt{25}}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{-5}{5}\right) = P(Z \leq -1) = \{\text{tabell}\} = 0,1587$$

b) $X_1, \dots, X_{10}$ är vikten på 10 apelsiner.

$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ = genomsnittliga vikten på 10 apelsiner

$$P(\bar{X} \leq 145) = \cancel{P(X \leq 145)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Obs!} \\ \bar{X} \sim N(150; \frac{25}{10}) \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-150}{\sqrt{\frac{25}{10}}}}_{Z \sim N(0,1)} \leq \frac{145-150}{\sqrt{\frac{25}{10}}}\right) = P(Z \leq -3,16) = 0,00078 \quad \text{tabell.}$$

c) $X_1, \dots, X_5$ vikten på 5 apelsiner.

Y = antal apelsiner som väger ≤ 145 g. $\sim \text{Bin}(5, p)$

där p fås från a), dvs. $p = 0,1587$.

$$\therefore \cancel{P(Y \leq 1)} = \cancel{P(Y=0) + P(Y=1)} =$$

$$= \cancel{\binom{5}{0} (0,1587)^0 (1-0,1587)^5}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{5}{0} (0,1587)^0 (1-0,1587)^5$$

$$= 1 - (1-0,1587)^5 = 0,5785.$$

7.

$$H_0: \mu = 2300$$

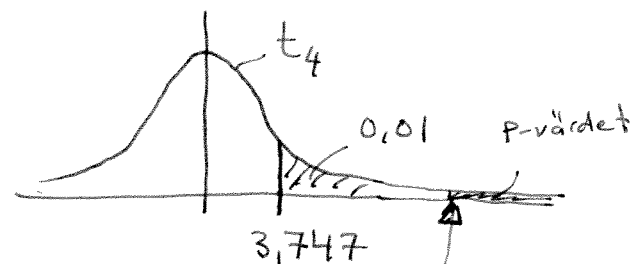
$$H_1: \mu > 2300$$

$$\alpha = 0,01$$

$$\bar{X} = \frac{2360,1 + 2379,5 + 2354,5 + 2365,6 + 2327,8}{5} = 2357,48$$

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{5}}{4} = \frac{(2360^2 + \dots + 2327,8^2) - \frac{(5 \cdot 2357,48)^2}{5}}{4} = 361,7$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - 2300}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1=4}$$



$$t_0 = \frac{2357,48 - 2300}{\sqrt{\frac{361,77}{5}}} = 6,7578$$

$\therefore$ Vi förkastar H_0 till förfördel för H_1 , (med signifikansnivå 0,01.)

Antagande: Att värmesköldarnas längd är normalfördelad! Eftersom stickprovet bara är på 5 värmesköldar kan avvikelser från normalfördelningen få stor betydelse för testets giltighet.

P-värdet ligger mellan 0,001 och 0,0025.

P-värdet är s.h. att få en statistiska längre in i kritiska området än det vi fick, givet att H_0 är sann. (Ses lätt i fig.)

Eftersom Fuglesangs liv hänger på värmeskölden så tycker jag att P-värdet är lite väl högt

8. ~~#6:~~ $X = \begin{cases} 1, & \text{om en person är född i förste kv} \\ 2, & \text{andra} \\ 3, & \text{tredje} \\ 4, & \text{fjärde} \end{cases}$

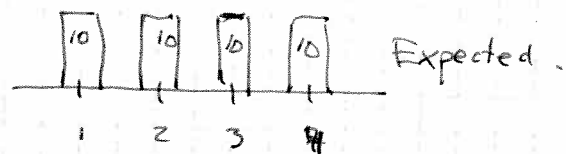
a)

$$H_0: X \sim \text{Uni}(\{1, 2, 3, 4\})$$

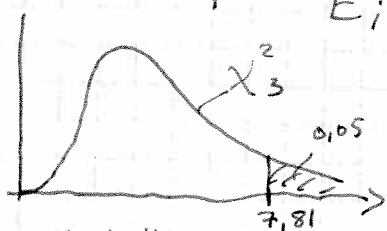
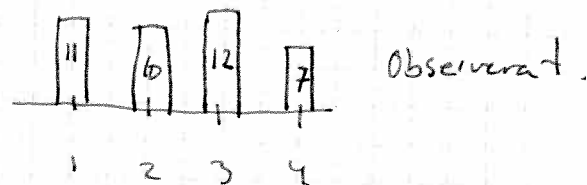
$$\text{dvs. } P(X=i) = 1/4, i=1, 2, 3, 4$$

$$H_1: X \neq \text{Uni}(\{1, 2, 3, 4\})$$

$$\alpha = 0,05$$



$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{4-p-1} = \chi^2_3$$



$p = \text{antal skatt. var} = 0$

Uträkning ger: $\chi^2_0 = \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(6-10)^2}{10} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10}$

$$= \frac{1}{10} + 0 + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} = \frac{14}{10}$$

$\therefore$ Vi kan inte förkasta H_0 (med $\alpha=0,05$). = 1,4

dvs. vi har inga starka skäl att tro att mortaliteten inte är jämnt fördelad över året.

b) Om stickprovet ~~starkt~~ är stort nog kommer testet känna av väldigt små avvikelser från nollhypotesen, obs. att $\chi^2_0 = 203,53$ med SCB:s siffror, dvs. vi förkastar H_0 väldigt! Men så små avvikelser är vi oftast inte intresserade av.