Lösningsförslag TMS136 (2016-08-27).

1) a) $X_1, \dots, X_n$ är ett stickprov från X om $X_1, \dots X_n$ är oberoende och har samma fördelning som X.

b) En skattare är en funktion av stickprovet. En skattning är resultatet av skattaren då stickprovet observerats.

c) Skattaren $\hat{\theta}$ kallas väntevärdesriktig om

$$E(\hat{\theta}) = \theta .$$

d) T.ex. skattarens varians.

2) A, B oberoende $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

- $P(A \cap B^c) = P($  $) = P(A) - P(A \cap B) \overset{A,B}{=} \text{oberoende} =$

$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$$

$\therefore$ A, B^c oberoende.

- $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A)) - P(B)[1 - P(A)] =$$

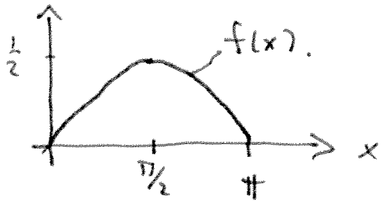
$$= P(A^c) - P(B)P(A^c) = P(A^c)[1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c).$$

$\therefore$ Ja!

3) $X \sim f(x) = c \sin x, \quad x \in [0, \pi].$

a) $1 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} c \cdot \sin x \, dx = c\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2c. \quad \therefore c = \frac{1}{2}.$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{2}$, observera :



Pga symmetri är

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\pi}{2}.$$

c) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$$2 \cdot \mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = x^2(-\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x(-\cos x)\,dx =$$

$$= \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x \cos x \, dx = \pi^2 + \underbrace{2x \sin x\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2 \sin x \, dx =$$

$$= \pi^2 - 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$$

$$\therefore \mathbb{E}[X^2] = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}4674.$$

4. $(X_1,\dots X_7)=(97, 234, 166, 7, 65, 17, 4)$.

a) Antaganden: Mina observationer är oberoende och är likformigt fördelade över $\{1,2,\dots,N\}$,

dvs. $f(x)=\frac{1}{N}$, $x\in\{1,\dots,N\}$.

b) $L(N)=f(x_1,N)\cdots f(x_7,N)=\left(\frac{1}{N}\right)^7$

Likelihoodfunktionen maximeras alltså av det minsta möjliga värdet på N, givet observationerna $x_1,\dots,x_n$.

Dvs. av $\max\{X_1,\dots X_7\}=234$.

5) Låt $X_i=\begin{cases}0 & \text{om Leo står still}\\ 1 & \text{om Leo går ett steg}\end{cases}$ vara Leos beslut vid i:te sekunden. Obs. $X_i\sim Ber(1/2)$

Sätt nu $S_n=\sum_1^n X_i$. Då representerar S_n sträckan Leo gått tillochmed n:te sekunden.

Observera att $S_n\sim Bin(n,\frac{1}{2})$ ~~eller~~ och om n är hyfsat stort kan vi approximera $S_n\overset{\text{appr.}}{\sim}N(\frac{n}{2},\frac{n}{4})$.

(Kan också motiveras med centrala gränsvärdessatsen eftersom S_n är en summa av oberoende likafördelade variabler.)

a) $P(\text{Leo har kommit 40 cm på 60 sek})=P(S_{60}\geq 40)=$

$=P\left(Z\geq\frac{40-60/2}{\sqrt{60/4}}\right)=P\left(Z\geq\frac{10}{\sqrt{15}}\right)=P(Z\geq 2{,}58)=1-0{,}995=0{,}005$

b) $\Rightarrow$

5b För vilket n har vi:

$P(S_n \gtrsim 40) \gtrsim 0{,}95$?

$$P\left(Z \gtrsim \frac{40 - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) \gtrsim 0{,}95 \Rightarrow \frac{2(40 - n/2)}{\sqrt{n}} \lesssim -1{,}65$$

$$\Rightarrow 80 - n \lesssim -1{,}65\sqrt{n} \Rightarrow n - 1{,}65\sqrt{n} - 80 = 0 .$$

Sätt $y = \sqrt{n}$.

$$y^2 - 2(0{,}82)y + (0{,}82)^2 - 80 - (0{,}82)^2 = 0$$

$$(y - 0{,}82)^2 = 80 + (0{,}82)^2$$

$$y = 0{,}82 + \sqrt{80 + (0{,}82)^2} \approx 9{,}8$$

$$n = y^2 = 96.$$

6. Låt S och E vara händelserna att en donator är sjuk respektive ELISA-testet är positivt.

$P(S) = 0{,}004$

$P(E \mid S) = 0{,}997$ (Sensitivitet)

$P(E^c \mid S^c) = 0{,}985$ (Noggrannhet)

a) $P(E^c \mid S) = 1 - P(E \mid S) = 1 - 0{,}997 = 0{,}003$

b) $$P(S \mid E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \mid S)P(S)}{P(E \mid S)P(S) + P(E \mid S^c)P(S^c)} =$$

$$= \frac{P(E \mid S)P(S)}{P(E \mid S)P(S) + (1 - P(E^c \mid S^c))P(S^c)} = 0{,}21$$

c) Nej, testet är till för att sjuka donatorer inte skall få ge blod.

d) $\left.\begin{array}{l} H_0: \text{donatorn sjuk.} \\ H_1: \text{donatorn frisk.} \end{array}\right\}$ D.v.s. du är skyldig (dvs sjuk) tills motsatsen bevisats.

$$\alpha = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann}) = P(E^c \mid S) = 1 - P(E \mid S) =$$

$$= 1 - \text{Sensitiviteten}.$$

$$\beta = P(\text{förkasta inte } H_0 \mid H_0 \text{ falsk}) = P(E \mid S^c) =$$

$$= 1 - P(E^c \mid S^c) = 1 - \text{Noggrannheten}.$$

7. X = antal ruttna apelsiner i en låda.

$H_0: X \sim Bin(24, p)$

$H_1: X \nsim Bin(24, p)$.

Skatta först p. Under H_0 är p = prop. ruttna apelsiner ~~E[X~~

så vi skatter $\hat{p} = \dfrac{0 \cdot 39 + 23 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{75 \cdot 24} = 0{,}028$.

Med detta får vi

$H_0: X \sim Bin(24; 0{,}028)$

$H_1: X \nsim Bin(24; 0{,}028)$.

Under H_0 har vi: $P(X=k) = \binom{24}{k}(0{,}028)^k(1-0{,}028)^{24-k}$

$P(X=0) = 0{,}5021 \Rightarrow E_0 = E[\text{antal lådor med 0 ruttna}] = 37{,}5$

$P(X=1) = 0{,}3509 \Rightarrow E_1 = 26{,}3$

$P(X=2) = 0{,}1175 \Rightarrow E_2 = 8{,}8$

$P(X \geq 3) = 0{,}032 \Rightarrow E_3 = 2{,}4$

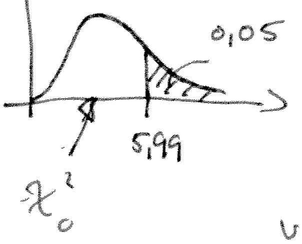
Slå ihop:
O_3 = Obs. ant. lådor med 3 eller fler ruttna = 1

Jag väljer $\alpha = 0{,}05$.

$$\chi_0^2 = \sum_{i=0}^{3} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(39-37{,}5)^2}{37{,}5} + \frac{(23-26{,}3)^2}{26{,}3} + \frac{(12-8{,}8)^2}{8{,}8} + \frac{(1-2{,}4)^2}{2{,}4}$$

$$= 2{,}4544.$$

χ_0^2 har $k-p-1 = 4-1-1 = 2$ antal frihetsgrader



Dvs. vi kan inte förkasta H_0.

P-värdet ligger mellan 0,5 och 0,1 så vi hade behövt ta ett stort α för att kunna ~~så~~ förkasta H_0.

Jag tror på leverantören.