

- 1) a) $X_1, \dots, X_n$ är oberoende och likafördelade.
 b) En funktion av stickprovet.
 c) θ parametern, $\hat{\theta}$ skattaren
 $\Rightarrow \text{Bias} = E(\hat{\theta}) - \theta$
 d) Ibland kan en skattares varians vara så liten att det upphäver att den har bias.

2) a) $E(\text{vinst liten steg}) = 15 \cdot P(\text{få liten steg}) =$
 $= 15 \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,42 \quad (\text{poäng})$
 $E(\text{vinst stor steg}) = 20 \cdot P(\text{få stor steg}) =$
 $= 20 \cdot 4! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,37 \quad (\text{poäng})$

$\therefore$ Välj liten steg.

b) $E(\text{vinst liten steg}) = 15 \cdot 4! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,28$

$E(\text{vinst stor steg}) = 20 \cdot 5! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0,31$

$\therefore$ Välj stor steg.

3) $\binom{n}{k}$ = antal sätt att välja i vilka experiment
 A skall inträffa. (*)
 $P(A)^k P(A^c)^{n-k} = P(A \text{ inträffar i just de}$
 $\text{experiment som valdes i } (*))$

$\therefore P(K=k) = \binom{n}{k} P(A)^k P(A^c)^{n-k}$

b) 1) Om $X_i = \begin{cases} 1 & \text{om } A \text{ inträffar i i-te exp.} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

så kan K skrivas som

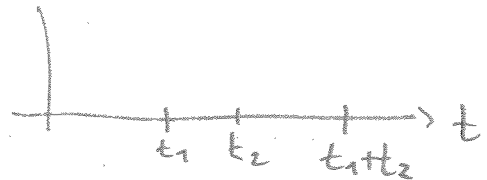
$$K = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ där } X_i \text{ är oberoende och likaförd.}$$

Centrals gränsvärdes satsen. $\Rightarrow$

$\therefore K \overset{\text{ppr.}}{\sim} N(-, \cdot)$ när n är stort nog.

2) Tumregeln är ju att np och $n(1-p)$ båda bör vara ≥ 5 .

4) Låt $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.



Minneslöshets egenskapen:

$$\boxed{P(T > t_1) = P(T > t_1 + t_2 \mid T > t_2)}, \quad \forall t_1, t_2 > 0$$

$$P(T > t_1) = \int_{t_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda s} \Big|_{t_1}^{\infty} = e^{-\lambda t_1}$$

$$P(T > t_1 + t_2 \mid T > t_2) = \frac{P(T > t_1 + t_2 \text{ \& } T > t_2)}{P(T > t_2)} =$$

$$= \frac{P(T > t_1 + t_2)}{P(T > t_2)} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_2}} = e^{-\lambda t_1} =$$

$$= P(T > t_1).$$

$$5) \quad X \sim f(x) = c x^\alpha, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$a) \quad 1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 c x^\alpha dx = c \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{c}{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow c = \alpha+1. \quad (\text{sic } f(x) = (\alpha+1)x^\alpha \quad \text{!})$$

$$b) \quad L(\alpha) = \prod_{i=1}^n (\alpha+1) x_i^\alpha \quad (\text{maximera denna m.o.p.})$$

Logaritmera!

$$\ln L(\alpha) = n \ln(\alpha+1) + \alpha \sum \ln x_i.$$

Derivera; Sätt = 0.

$$\frac{d}{d\alpha} \ln L(\alpha) = \frac{n}{\alpha+1} + \sum \ln x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum \ln x_i} - 1 \quad (\text{MLE})$$

$$\text{Stickprov: } 0,15; 0,07; \dots; 0,43 \Rightarrow \hat{\alpha} = -0,47.$$

$$c) \quad E[X] = \int_0^1 x (\alpha+1) x^\alpha dx = \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)} x^{\alpha+2} \Big|_0^1 = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

Skattas med $\bar{X}$.

$$\bar{X} = \frac{\hat{\alpha}+1}{\hat{\alpha}+2} = \frac{\hat{\alpha}+2-1}{\hat{\alpha}+2} = 1 - \frac{1}{\hat{\alpha}+2} \Rightarrow \frac{1}{\hat{\alpha}+2} = 1 - \bar{X}.$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{1-\bar{X}} - 2 \quad (\text{Mom}), \quad \text{Stickprovet} \Rightarrow \hat{\alpha} = -0,68.$$

d) ML-metoden är (assymptotiskt) väntevärdesriktig och har liten varians men kan vara svår att hitta. Mom-metoden har (i allmänhet) samma egenskaper än ML, men är ofta lätt att hitta.

6) Slumpvandring. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ -1, & 1/2 \end{cases}$
 Börja med X_i , $\boxed{E(X_i) = 0, \text{Var}(X_i) = \frac{1}{4}}$

a) $E(S_n) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = 0$

$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(\sum X_i) = \sum \text{Var}(X_i) = \frac{n}{4}$

b) CLT $\Rightarrow S_n \overset{\text{approx}}{\sim} N(0, \frac{n}{4})$ för stora n .
 ($n=1$ miljon är stort...)

$\therefore P(-1000 \leq S_n \leq 1000) = P\left(\frac{-1000}{\sqrt{n/4}} \leq Z \leq \frac{1000}{\sqrt{n/4}}\right) =$
 $= P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \underbrace{\Phi(-2)}_{=0,0228} =$
 $= 1 - 0,0228 - 0,0228 = 0,95$

c) $K = \text{antal hopp åt höger} \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ (se uppg.)

$P(K = \frac{n}{2}) = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

7) Antag att min vikt är normalfördelad, $N(\mu, \sigma^2)$

Tag ett α , tex 0,05.

$0,95 = P(A \leq \mu \leq B) = P\left(\frac{\bar{X}-B}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-A}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$
 $= P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-B}{\sigma/\sqrt{n}}}_{-2,447} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\sim N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}-A}{\sigma/\sqrt{n}}}_{2,447}\right) \Rightarrow$

$A, B = \bar{X} \pm 2,447 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 90,46 \pm 2,447 \frac{0,6241}{\sqrt{7}} =$
 $= \begin{cases} 89,88 \\ 91,03 \end{cases}$

8) Antal stormar/tidsenhet Poissonfördelat $\Rightarrow$
Tiden mellan stormarna T /Exponentialfördelat.

Skatta intensiteten λ .

Kom ihåg att $E[T] = \frac{1}{\lambda}$, så $\lambda = \frac{1}{E[T]}$

så maxent-skattaren (eller MLE) är $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

$\hat{\lambda} = 0,00093$ stormar
dygnet.

Titta på stickprovet och gissa hur du skall dela upp det i "lådor".

<u>Jag gissar:</u>	<u>Observerat</u>	<u>Förväntat</u>	
0 - 250	8	$25 \cdot 0,21 = 5,2$	$P(0 \leq T \leq 250) =$ $= 1 - e^{-\lambda \cdot 250} = 0,21$
250 - 500	1	$25 \cdot 0,16 = 4,1$	$P(250 \leq T \leq 500) = 0,16$
500 - 1000	7	5,9	$P(500 \leq T \leq 1000) = 0,2$
1000 - 1750	5	4,9	$P(1000 \leq T \leq 1750) = 0,1$
1750 - ∞	4	5,0	$P(T \geq 1750) = 0,2$

$H_0: T \sim \text{Exp}(\lambda)$

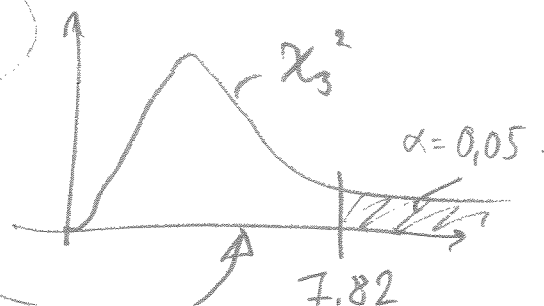
$H_1: T \not\sim \text{Exp}(\lambda)$.

$\alpha = 0,05$

Statistiken $\chi^2_0 = \sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{\substack{k-p-1 \\ = 3}}$

$\chi^2_0 = 4,26$.

$k = 5$ antal
"lådor"
 $p =$ ant. skattade
param = 1.



Alltså kan vi inte förkasta H_0 .