

Lösningar Tenta 2011-01-10 (TMS136)

1) a) $A \cap B = \emptyset$

b) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

c) $A = \text{Jag är förkyld}$

$B = \text{Jag går tentarond.}$

Kan hända samtidigt så $A \cap B \neq \emptyset$ men har inget med varandra att göra så $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

2) Låt $X = \text{vad tärningen visar}$
 $K = \text{antal klave.}$

$$\begin{aligned} P(K=0) &= P(K=0 | X=1)P(X=1) + \dots + P(K=0 | X=6)P(X=6) = \\ &= \sum_{i=1}^6 \underbrace{P(K=0 | X=i)}_{=(1/2)^i} \underbrace{P(X=i)}_{=1/6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right) = \\ &= \frac{21}{128} = 0,164. \end{aligned}$$

3) a) Självklart är H och S likafördelade så $\text{Var}(H) = \text{Var}(S)$!

$$\text{Var}(H) = E(H^2) - E(H)^2$$

$$E(H) = \sum_{h=0}^3 h \cdot P(H=h) = P(H=1) + 2P(H=2) + 3P(H=3).$$

$$P(H=1) = \binom{3}{1} \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50} = \frac{57798}{132600} = 0,436$$

$$P(H=2) = \binom{3}{2} \frac{13 \cdot 12 \cdot 39}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{18252}{132600} = 0,138$$

$$P(H=3) = \binom{3}{3} \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{1716}{132600} = 0,013$$

Så $E(H) = 3/4$ och $E(H^2) = \sum_{h=1}^3 h^2 P(H=h) = \frac{75}{68} \Rightarrow$ Värd.

$$\text{Var}(H) = \text{Var}(S) = E(H^2) - E(H)^2 = \frac{75}{68} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{147}{272} = 0,54$$

$$b) \rho(H, S) = \frac{\text{Cov}(H, S)}{\sqrt{\text{Var}(H)\text{Var}(S)}} = \frac{\text{Cov}(H, S)}{0,54}$$

$$\text{Cov}(H, S) = E(H \cdot S) - E(H)E(S) = E(HS) - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Så vi behöver $E(HS)$

$$E(HS) = \sum_{h=0}^3 \sum_{s=0}^3 h \cdot s \cdot f_{HS}(h, s) = \begin{cases} \text{De } h=0 \text{ eller} \\ s=0 \text{ försvinner} \\ \text{termerna såklart!} \end{cases} =$$

$$= \sum_{h=1}^3 \sum_{s=1}^3 h \cdot s \cdot f_{HS}(h, s) = \sum_{h=1}^3 h \left(\sum_{s=1}^3 s \cdot f_{HS}(h, s) \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^3 h \left[f_{HS}(h, 1) + 2f_{HS}(h, 2) + 3f_{HS}(h, 3) \right] =$$

$$= 1 \cdot [f(1, 1) + 2f(1, 2) + \underbrace{3f(1, 3)}_{=0}] + 2 \left[f(2, 1) + \underbrace{2f(2, 2)}_{=0} + \underbrace{3f(2, 3)}_{=0} \right] + 3 \left[\underbrace{f(3, 1) + 2f(3, 2) + 3f(3, 3)}_{=0} \right] = \begin{cases} \text{Observera att } f(h, s) = \\ = P(H=h, S=s) = 0 \text{ om} \\ h+s > 3 \text{ (Det är bara Skatt)} \end{cases}$$

$$= f(1, 1) + 2f(1, 2) + 2f(2, 1) = \begin{cases} f(1, 2) = f(2, 1) \\ \text{pga symmetri!} \end{cases} =$$

$$= f(1, 1) + 2f(1, 2)$$

$$f(1, 1) = P(H=1, S=1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot 3! = \frac{26364}{132600}$$

hjärter
spader
värd
amman
antal permutationer

$$f(1, 2) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \binom{3}{1} = \frac{6084}{132600}$$

hjärter
spader
spader
hjärter
ställer att
sätta H.

$$\text{Så } E(HS) = \frac{26364 + 4 \cdot 6084}{132600} = \frac{13}{34} \Rightarrow \text{Cov}(H, S) = \frac{13}{34} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{49}{272}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(H, S) = \frac{-49/272}{147/272} = -\frac{49}{147} = -\frac{1}{3}$$

Att korrelationen är negativ är klart eftersom "många" hjärter bland de 3 korten gör att det endast finns plats för några "få" spader, och tvärtom.

Man kunde t.o.m. gissat på exakt $-\frac{1}{3}$ eftersom antal hjärter (H) beror helt på antalet spader (S) och antalet andra kort (klöver, ruter).

Och spadrarna är exakt $\frac{1}{3}$ av {spader, ruter, klöver}.

4.) Observera att täthetsfunktionen för X är $f(x) = e^{-x}$.

$$a) P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^2 = -e^{-2} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = 0,23$$

$$b) E(X) = \frac{1}{\lambda_x} = 1, \text{ Var}(X) = \frac{1}{\lambda_x^2} = 1$$

$$E(Y) = \frac{1}{2}, \text{ Var}(Y) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Så: } E(3X - 2Y) = 3E(X) - 2E(Y) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Var}(3X - 2Y) = \{\text{OBEROENDE!}\} = 9\text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) = 9 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 10.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{ty de är oberoende!}$$

5a) Typ I fel := Förkasta H_0 då H_0 är sann.

Typ II fel := Förkasta inte H_0 då H_0 är falsk.

b) Signifikansnivån $\alpha = P(\text{typ I fel})$ bestämmer man själv (litet, 0,05 eller 0,01 tex). Dvs man garderar sig mot typ I fel.

Eftersom

$\alpha = P(\text{Förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$ är liten
så är

$1 - \alpha = P(\text{inte förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$ stor.

Vi kan alltså vara ganska säkra på att om H_0 är sann, så förkastar vi den inte.

OBS! Detta betyder inte att vi kan vara ganska säkra på att H_0 är sann om vi förkastar den!!!

Dvs. Om testet förkastar H_0 så kan vi vara ganska säkra på att H_0 faktiskt är falsk.

$$6) \quad L(p) = (1-p)^{x_1-1} p (1-p)^{x_2-1} p \dots (1-p)^{x_n-1} p = \\ = p^n (1-p)^{-n} (1-p)^{\sum x_i}$$

$$\ln L(p) = n \ln p - n \ln(1-p) + \sum x_i \ln(1-p)$$

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} - \frac{\sum x_i}{1-p} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(1-p)}{p} + \frac{n(1-p)}{1-p} = \sum x_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} - 1 + 1 = \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\text{Also:} \quad \text{MLE}(p) = \hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$$

b) 0,75 ligger inte i konfidenstervall! !

Den ser alltså ut att dra mer än 0,75 liter/mil.

c) Om bensinförbrukningen inte är normalfördelad
så blir $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ inte t_{n-1} fördelad.

Detta kan åtgärdas genom att ta mycket
mer data.

8) X = askorbinsyrehalten i ekologisk potatis. $E(X) = \mu_x$
 Y = _____ " _____ konventionell potatis. $E(Y) = \mu_y$.

$$H_0: \mu_x = \mu_y \quad (\mu_x - \mu_y = 0)$$

$$H_1: \mu_x > \mu_y \quad (\mu_x - \mu_y > 0)$$

Varianser för x och y
är okända och kan
ej antas vara lika!

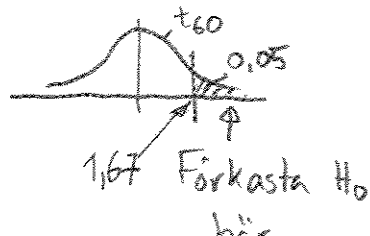
Jag väljer $\alpha = 0,05$.

$$\text{Teststatistika: } T_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \overbrace{(\mu_x - \mu_y)}^{= 0 \text{ under } H_0}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_v$$

$$\text{där } v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{0,41}{0,0058} = 70,13, \text{ avrunda nedåt } v = 70.$$



Eftersom t_{70} ej finns i tabellen, använder vi t_{60} .



$$t_0 = \frac{14,49 - 12,74}{\sqrt{\frac{13,18}{38} + \frac{9,33}{34}}} = 2,22 > 1,67. \therefore \text{Förkasta } H_0 \text{ till} \\ \text{förmån för } H_1. \text{ P-värde} \approx 0,01.$$