

1. a) $X: S \rightarrow \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = f(x)f(y)$

c) Signifikansnivån = $\alpha = P(\text{förkastar } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$
 Styrkan = $1/\beta = 1 - P(\text{inte förk. } H_0 \mid H_0 \text{ falsk}) =$
 $= P(\text{förk. } H_0 \mid H_0 \text{ falsk}).$

2. a) $P(\text{få ett sammanhörande par}) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} =$
 $= \frac{n}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}} = \frac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1} \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$

b) $P(\text{höger och vänstersko}) = \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} =$
 $= \frac{n^2}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{n}{2n-1} = \frac{n/n}{(2n-1)/n} = \frac{1}{2 - 1/n} \rightarrow \frac{1}{2}, n \rightarrow \infty.$

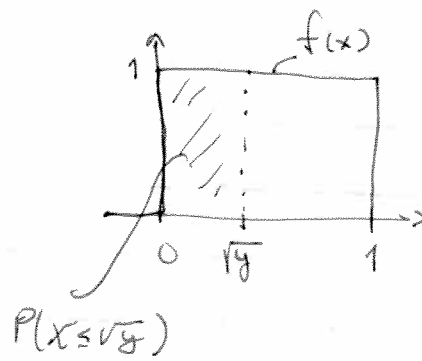
3. S = skyldig, D = har DNA:t.

Vi är ute efter $P(S \mid D) = \frac{P(D \mid S)P(S)}{P(D)} =$
 $= \frac{P(D \mid S)P(S)}{P(D \mid S)P(S) + P(D \mid S')P(S')} = \left\{ \begin{array}{l} P(D \mid S) = 1 \\ P(S) = 1/172 \\ P(D \mid S') = 0.005 \end{array} \right\} =$
 $= \frac{1/172}{1/172 + 0.005(1 - 1/172)} = 0.5391.$

Dvs. det är bara c.a. 54% s.k. att det var Jeeves.

4) $X \sim \text{Uni}([0, 1])$

$Y = X^2$



a) $F(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \boxed{\sqrt{y}}$

b) $f(y) = \frac{d}{dy} F(y) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}}$

c) $E(Y) = E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = \int_0^1 x^4 dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$
 $= \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{4}{45}}$

5) $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t) \Leftrightarrow T = \text{tiden mellan olyckor} \sim \text{Exp}(\lambda)$

a) $E[\text{tid till nästa olycka}] = E(T) = \frac{1}{\lambda}$

b) $P(T \leq \frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}} =$
 $= 1 - \frac{1}{e} = 0.6321$

Dvs 63% chans att olyckan är framme innan man förväntar sig det! (:))

c) ~~Tidsintervallen i en~~ Poissonprocessen skall vara oberoende av vilket tidsintervall man tittar på. Intensiteten (λ) skall vara samma hela tiden. Är det det i fallet "olyckor"? Njää...

6 $X_1, \dots, X_8$ rökare. $\bar{X} = 140$ $S_x^2 = 85.14$
 $Y_1, \dots, Y_{10}$ icke-rökare. $\bar{Y} = 131.8$ $S_y^2 = 162.18$

Antagande: X och Y är normalfördelade med samma varians!

Poolad skattning av variansen:

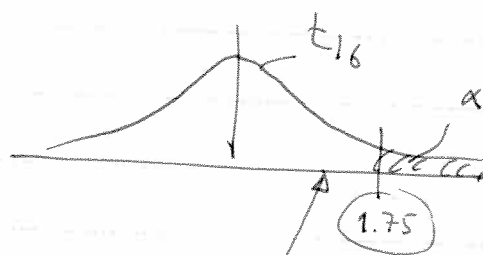
$$S_p^2 = \frac{(8-1)S_x^2 + (10-1)S_y^2}{8+10-2} = 128.48, \quad S_p = 11.33$$

$\alpha = 0.05$

$H_0: \mu_x = \mu_y \quad (\mu_x - \mu_y = 0)$

$H_1: \mu_x > \mu_y \quad (\mu_x - \mu_y > 0)$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} \sim t_{8+10-2=16}$$



$$T_0 = \frac{140 - 131.8}{11.33 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = 1.525$$

Vi kan alltså inte påstå att rökning höjer blodtrycket.

p-värdet är närmast mellan 0.05 & 0.1.

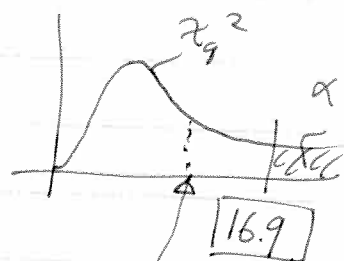
7. Lotten! X = ett valt nummer mellan $0, \dots, 9$.

a) $H_0: X \sim \text{Uni}(0, 1, 2, \dots, 9)$

$H_1: X \neq \text{Uni}(\dots)$

$\alpha = 0.05$

$\chi^2_0 = \sum_{i=0}^9 \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-p-1} = 10-0-1 = 9$



$\chi^2_0 = \frac{1}{207} \sum_0^9 (\text{skillnader})^2 = 10.14$

$\therefore$ Vi kan inte förkasta att Lottot är rättvist!
P-värde > 0.1

b) $p_7 = P(X=7)$

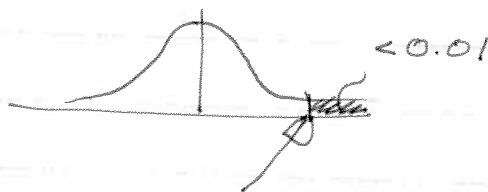
~~$X = 241$
 $p = \frac{241}{2070}$~~

$H_0: p_7 = 0.1$ (rättvist!)

$H_1: p_7 > 0.1$ (ej rättvist)

$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum X_i \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$



$\hat{p} = \frac{241}{2070} = 0.1164 \Rightarrow Z_0 = \frac{0.1164 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{2070}}} = 2.49$

P-värdet blir < 0.01 alltså förkastar testet H_0 .

Men!!! Detta är data snooping! Man får inte titta på data och sedan bestämma vad man skall testa. Alltså säger detta inget om lottot.

8. X_i $\begin{matrix} 0 & \xrightarrow{1-\varepsilon} & 0 \\ & \searrow \varepsilon & \\ 1 & \xrightarrow{1} & 1 \end{matrix}$ Y_i . $\varepsilon = P(Y_i=1 | X_i=0)$.

a) Ungefär lika många 1:or som 0:or på skivan
 $\Rightarrow P(X_i=1) \approx 1/2$.

$$P(Y_i=1) = P(Y_i=1 | X_i=0)P(X_i=0) + P(Y_i=1 | X_i=1)P(X_i=1)$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

b) Obs: $E(Y_i) = P(Y_i=1) = \frac{1+\varepsilon}{2}$ (Bernoullivariabel!)

Eftersom $E(Y)$ moment skattas med $\bar{Y}$, så får vi:

$$\varepsilon = 2E(Y_i) - 1 \Rightarrow \hat{\varepsilon} = 2\bar{Y} - 1$$

c) $E(\hat{\varepsilon}) = E(2\bar{Y} - 1) = 2E(\bar{Y}) - 1 = 2E(Y_i) - 1 =$

$$= 2 \frac{1+\varepsilon}{2} - 1 = \varepsilon. \quad \therefore \text{v.v.r.}$$

$$\text{Var}(\hat{\varepsilon}) = \text{Var}(2\bar{Y} - 1) = 4\text{Var}(\bar{Y}) = 4 \frac{\text{Var}(Y_i)}{n}$$

Kom ihåg att $\text{Var}(Y_i) = p(1-p)$ för Bernoulli, där $p = \frac{1+\varepsilon}{2}$
 i detta fall. Så $\text{Var}(Y_i) = \frac{1+\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{2}\right) = \frac{1-\varepsilon^2}{4}$.

$$\therefore \text{Var}(\hat{\varepsilon}) = 4 \frac{\frac{1-\varepsilon^2}{4}}{n} = \frac{1-\varepsilon^2}{n}$$

18

d) Tomregeln: För Bernoulli (eller Binomial om du vill)

skall $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ (eller 10...)

Kom ihåg att $p = \frac{1+\varepsilon}{2} > \frac{1}{2}$ så vi kan koncentrera oss på:

$$n(1-p) \geq 5.$$

$$\therefore n\left(1 - \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \geq \left\{ \text{worst case} \right\}_{\varepsilon = 1/6} \geq n \cdot \frac{5}{12} \geq 5$$

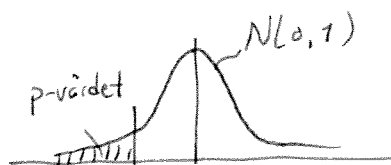
Dvs om $\boxed{n \geq 12}$

e) $H_0: \varepsilon = 1/6$
 $H_1: \varepsilon < 1/6$ (obs!)

Stickprov: $Y_1, \dots, Y_{1000}$.

OBS: $\hat{\varepsilon} \sim N(\varepsilon, \frac{1-\varepsilon^2}{n})$ enligt c) & d) så

$$Z_0 = \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0^2}{n}}} \sim N(0,1)$$



$$\hat{\varepsilon} = 2\bar{Y} - 1 = 2 \frac{553}{1000} - 1 = 0,106$$

$$\therefore Z_0 = \frac{0,106 - 1/6}{\sqrt{\frac{1-(1/6)^2}{1000}}} = -1,9457$$

$$\boxed{p\text{-värdet} = 1 - 0,9744 = 0,0256.}$$

Så, tjä, gränfall... Beror på hur viktigt det är att $\varepsilon < \frac{1}{6}$.