

Lösningar 2012-08-28 TMS136.

1a) Tex. $A =$ studenten är tjej. dvs. $A = \{\text{tjejer}\}$
 $B =$ studenten är kille.

$$P(A \cup B) = 1 \quad \text{Självklart... } \therefore$$

1b) $A = \{\text{klarar tentan}\}$
 $B = \{\text{killar}\}$

Borde vara oberoende va?

1c) $X = \begin{cases} 1 & \text{om studenten kille} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

$$X \sim \text{Ber}(p) \quad \text{där } p = \frac{\text{antal killar}}{\text{tot. antal studenter}}$$

2)

$P(\text{klädd triss i poker}) =$

$$\frac{\overbrace{\binom{3}{1} \binom{4}{3} \binom{48}{1} \binom{44}{1}}^{\substack{\text{Knekt eller} \\ \text{Dam eller} \\ \text{Kung} \quad \quad \quad \text{3 av dom.} \quad \quad \quad \text{ett annat} \\ \text{kort}}}}{\binom{52}{5}} =$$

ett annat kort till, som inte är det tidigare eller trissen...

$\blacktriangledown$ alla pokerhänder.

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 48 \cdot 44}{\binom{52}{5}} = 0,0098 \approx 1\%.$$

$$3) \quad X_1, \dots, X_n, \quad \mathbb{E}[X_i] = \mu, \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \mathbb{E}[X_1 \bar{X}] - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{\mu} \underbrace{\mathbb{E}(\bar{X})}_{\mu} =$$

$$= \mathbb{E}\left[X_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_1 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_1 X_n] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\mathbb{E}(X_1^2) + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}(X_1 X_i) \right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\underbrace{\mathbb{E}(X_1^2)}_{\sigma^2 + \mu^2} + (n-1) \underbrace{\mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_i)}_{\mu^2} \right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\mu^2}{n} + \frac{(n-1)}{n} \mu^2 - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\mu^2}{n} + \mu^2 - \frac{\mu^2}{n} - \mu^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore \rho(X_1, \bar{X}) = \frac{\text{Cov}(X_1, \bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$4) \quad T \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{200}), \quad E(T) = 200.$$

$$a) \quad P(T \leq 200) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\frac{t}{200}} \Big|_0^{200} =$$

$$= 1 - e^{-1} \approx 0,63\%.$$

Minneslöshetsegenskapen:

Hur länge lampan fortsätter lysa fr.o.m nu är oberoende av hur länge den redan lyst. Dvs. lampan åldras inte.

$$P(T > t+s \mid T > t) = P(T > s).$$

$$5) \quad \underbrace{X_1, \dots, X_{144}}_{\text{ägg}}, \quad E(X_i) = 63, \quad \sigma(X_i) = 4.$$

Centrala gr.v. satsen

$$\text{Totala vikten} = S = \sum_1^{144} X_i \overset{\text{appr.}}{\sim} N(\underbrace{63 \cdot 144}_{=9072}; \underbrace{4^2 \cdot 144}_{=2304})$$

$$P(S \leq 9\text{kg}) = P\left(Z \leq \frac{9000 - 9072}{\sqrt{2304}}\right) = P(Z \leq -1.5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tabell.}}}{=} 0.067 \approx \frac{1}{15}.$$

Anmäl inte, ty det händer rätt ofta (1 gång på 15).

6) ~~$\hat{p} = \bar{X}$~~

$X_1, \dots, X_{3300}$ stickprov. $X_i = \begin{cases} 1 & \text{om Centerpartis} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

a)
$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{3300} \sum_{i=1}^{3300} X_i = \frac{149}{3300} = 0.0452$$

b)
$$E(\hat{p}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$$

 $\therefore \text{v.v.r.}$

c) Jag väljer 95%-igt CI.

$$0.95 = P(A \leq p \leq B) = P(\hat{p} - B \leq \hat{p} - p \leq \hat{p} - A) =$$

$$= \left\{ \hat{p} \underset{\text{approx.}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \right\} =$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - B}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{\hat{p} - A}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) = \left\{ \begin{array}{l} n=3300 \text{ är} \\ \text{stort s\u00e5} \dots \end{array} \right\} \approx$$

$$\approx P\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - B}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}}_{-1.96} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq \underbrace{\frac{\hat{p} - A}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}}_{1.96} \right) \Rightarrow$$

$$A = \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$B = \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

d) J\u00e4! 4% \u2208 CI.

95%CI $\Rightarrow$

~~$$0.045 \leq p \leq 0.0453$$~~

$$0.0381 \leq p \leq 0.0522$$

7) H_0 : Färg oberoende av form.

H_1 : Beroende.

$$\alpha = 0.05.$$

Observerat:

	Slät	Skrynk	
Gul	315	101	416
Grön	108	32	140
	423	133	556

Skatta $P(\text{Gul})$, $P(\text{Grön})$, $P(\text{Slät})$, $P(\text{Skrynk})$.

$$\hat{P}(\text{Gul}) = \frac{416}{556} = 0.7482$$

osv...

Förväntat antal släta, gula är
(under H_0) $\hat{P}(\text{gul}) \cdot \hat{P}(\text{Slät}) \cdot 556 =$
 $= 316,4922.$

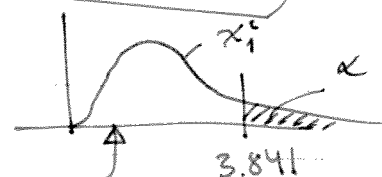
Förväntat:

	Slät	Skrynk	
Gul	316,4922	99,5108	$\hat{P}(\text{gul}) = 0.7482$
Grön	106,5108	33,4892	$1 - \hat{P}(\text{gul})$
	$\hat{P}(\text{Slät}) = 0.7608$	$1 - \hat{P}(\text{Slät})$	

$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{4-2-1} = \chi^2_1$$

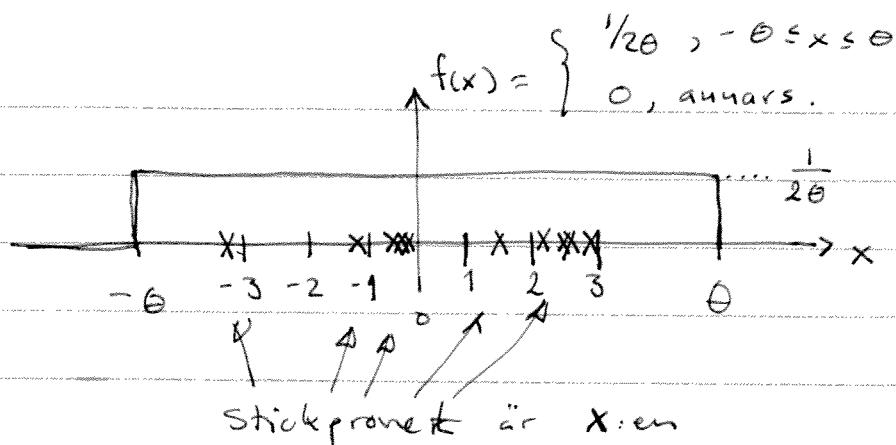
Stoppa in värdena: $\chi^2 = 0.1164$

2 skattade $\hat{P}(\text{gul})$ och $\hat{P}(\text{slät})$.



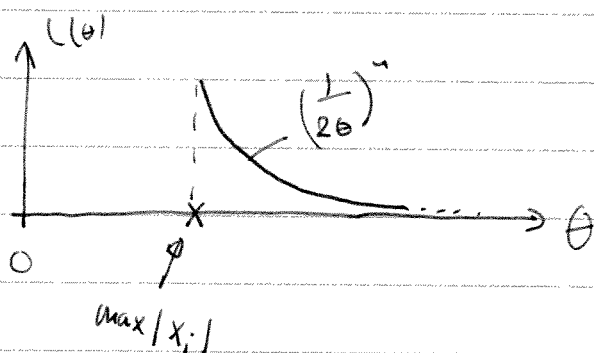
Alltså kan vi inte utsluta att de är oberoende!

8) a)



b) ~~$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n$~~

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \quad \text{för } \theta \geq \max(|x_i|) \\ (=0 \text{ annars}).$$



c) Observera att $L(\theta)$ maximeras av det minsta θ som är större än alla $|x_i|$ i stickprovet.

Alltså är $\text{MLE}(\theta) = \max |x_i|, i = 1, \dots, n.$

Med vårt stickprov alltså 3.13.

d) Nej! $\max |x_i|$ underskattar alltid θ , eftersom θ alltid måste vara $\geq \max |x_i|$.