

Lösningar Tenta 2012 jan. 14. (TMS136)

1) $\alpha = P(\text{inte förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ sann})$

$$\beta = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_0 \text{ falsk})$$

Stickprov: $X_1, \dots, X_n$ oberoende, likafördelade.

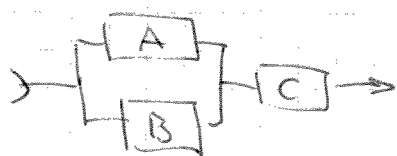
Skattare: funktion av stickprovet, $f(X_1, \dots, X_n)$

Skattning: Vad skattaren blir då stickprovet observerats: $f(x_1, \dots, x_n)$.

2) Låt A, B & C vara händelserna att komp. A, B resp C fungerar.

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0,9.$$

Observera att: $P(B^c \mid A^c) = 0,3$.



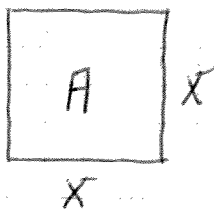
$$P(\text{kretsen fungerar}) =$$

$$= P(A \cup B \cap C) = \{A \cup B \text{ oberoende av } C\}$$

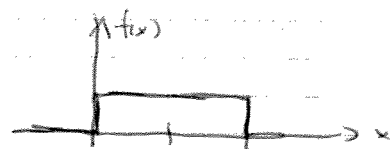
$$= P(A \cup B) P(C) = \{ \text{de Morgans lagar} \} = [1 - P(A^c \cap B^c)] P(C)$$

$$= P(C) [1 - P(B^c \mid A^c) P(A^c)] = 0,9 [1 - 0,3 \cdot 0,1] = \underline{\underline{0,873}}$$

3)



$$A = X^2, \quad X \sim \text{Uni}([0, 6]), \quad f_X(x) = \frac{1}{6}$$



$$E[\text{Omkör}] = E[4X] = 4E[X] = 4 \cdot 3 = 12$$

~~a) $P(X^2 = 4)$ or $P(X = 2)$ (continuous)~~

$$b) E[A] = E[X^2] = \int_0^6 x^2 f(x) dx = \int_0^6 x^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 = \frac{36}{3} = 12$$

~~c) $P(X^2 < 4)$ or $P(X < 2)$ or $P(X > 2)$ or $P(X^2 > 4)$ or $P(X > 2)$ or $P(X < 2)$~~

~~$P(X < 2)$~~ c) $P(A > \text{Omkör}) = P(X^2 > 4X) =$
 $= P(X > 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

4) Vi vill bestämma fördelningen för tiden till första händelsen. Titta på:

$$P(T > t) = P(\text{ingen händelse på tiden } t) =$$

$$= P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Alltså: T är exponentialfördelad.

5) a) $Y = \text{antal kast tills "krona"} \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} P(Y > 3) &= 1 - P(Y=1) - P(Y=2) - P(Y=3) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = 0.125. \end{aligned}$$

b) $X = \text{antal mynt som behöver fler än 3 kast}$
 $\sim \text{Bin}(n; 0.125)$

$$E[X] = 0.125n, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot n = \frac{7n}{64}$$

c) $n = 1000$, CLT $\Rightarrow X \overset{\text{approx}}{\sim} N(125, \frac{7000}{64})$

$$\text{Så: } P(X \leq 100) = P\left(\frac{X-125}{\sqrt{\frac{7000}{64}}} \leq \frac{100-125}{\sqrt{\frac{7000}{64}}}\right) \approx$$

$$\approx P(Z \leq -2.39) = 0.00841 \approx 1\%.$$

Person:	i = 1	2	3	4	5
X Före	162	168	197	202	225
Y Efter	179	170	196	188	210
$D_i = Y_i - X_i$	17	2	-1	-14	-15

Vi gör ett parat t-test eftersom X_i och Y_i är beroende (samma person).

• $H_0: \mu_D = 0$

• $H_1: \mu_D \neq 0$

$\alpha = 0,05$

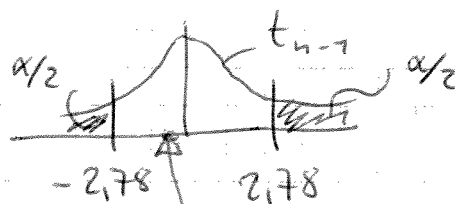
Antaganden

Personerna är oberoende
och kolesterolvärdena är
normalfördelade!

$\bar{D} = \frac{1}{5} \sum D_i = -2,2$

$S_D^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (D_i - \bar{D})^2 = 172,7$, $S_D = \sqrt{S_D^2} = 13,1415$

• $T_0 = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} = t_4$

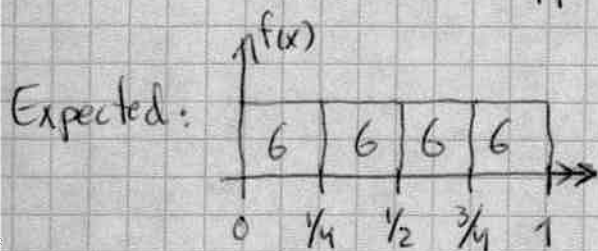


• $T_0 = -0,3348$

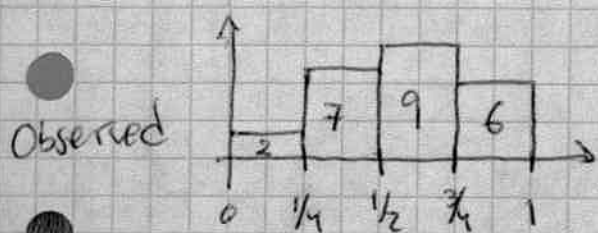
Alltså, vi kan inte påstå att kaffe påverkar
kolesterolvärdet.

7)

Eftersom vi vill ha $E_i > 5$ så väljer vi att dela upp intervallet i 4 delar.



Och om spelet verkligen är likförmigt fördelat ~~kan~~ kan vi förvänta oss att få 6 st i varje.



Kolla på data!

2 st. mellan 0 och 1/4
7 st. mellan 1/4 och 1/2
9 st. mellan 1/2 och 3/4
6 st. mellan 3/4 och 1.

H_0 : Spelet är likförmigt fördelat.

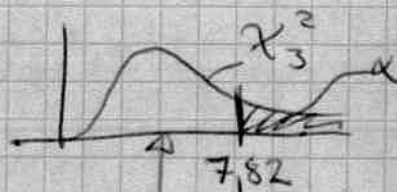
H_1 : inte så.

$\alpha = 0,05$.

$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{4-1} = \chi^2_3, \quad (\text{iuga skattade param.})$$

$$\chi^2_0 = \frac{1}{6} (4^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2) =$$

$$= \frac{1}{6} (16 + 1 + 9) = \frac{26}{6} = 4 + \frac{2}{3} = 4.666$$



Vi kan alltså inte förkasta H_0 .

Dvs vi kan inte säga att spelet inte är likförmigt fördelat.

8) Låt N vara antalet fiskar i delsjön, av dem har jag märkt 50 st, så:

$$p = P(\text{en slumpmässigt vald fisk är märkt}) = \frac{50}{N}$$

Låt $X_1, \dots, X_{30}$ vara de fiskar jag tar upp under månaden.

Observera att $X_i \sim \text{Ber}(p)$ för varje $i = 1, \dots, 30$ och de är oberoende (antar vi).

Max. likelihood skattaren för p i en Bernoulliförd. är $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{30} \sum X_i$ (Moment-skattaren också...)

$$\text{Dvs. } \frac{50}{N} = \bar{X} \Rightarrow \boxed{\hat{N} = \frac{50}{\bar{X}} = \frac{50 \cdot 30}{\sum X_i}}$$