

TMS136

Föreläsning 10

Intervallskattningar

- Vi har sett att vi givet ett stickprov kan göra punktskattningar för fördelnings-/populationsparametrar
- En punktskattning är som vi minns ett tal som är en (förhoppningsvis kvalificerad) gissning av ett parametervärde
- Vi vill kanske få en uppfattning om vilken precision en punktskattning har, alltså troliggöra att den "ligger i en viss härad"
- Nedan ska vi kika på hur man gör *konfidensintervall* för parametrar

Konfidensintervall

- Givet stickprovet $X_1, \dots, X_n$ från en normalfördelning med (okänt) väntevärde μ och (känd) varians σ^2 vet vi att

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

är standard normalfördelad

Konfidensintervall

- Det betyder ju exempelvis att

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) = 0.95$$

vilket ju efter lite "ommöblering" ger att

$$P(\bar{X} - 1.96 \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \sigma/\sqrt{n}) = 0.95$$

Konfidensintervall

- Vi kallar

$$\bar{X} \pm 1.96 \sigma / \sqrt{n}$$

ett 95%-igt *konfidensintervall* för μ

- Som vi ser blir ”precisionen” bättre (intervallet blir smalare) med ett större stickprov, vilket ju borde vara fallet...

Konfidsensintervall

- Om vi observerar $x_1, \dots, x_n$ från en normalfördelning med känd standardavvikelse σ observerar vi också det 95%-iga konfidsensintervallet

$$\bar{x} \pm 1.96 \sigma / \sqrt{n}$$

för μ

- Om vi observerar 1.3, 1.4, 1.5, 1.1, 1.2 från en normalfördelning med $\sigma = 0.5$ observerar vi alltså det 95%-iga konfidsensintervallet

$$1.3 \pm 1.96 \cdot 0.5 / \sqrt{5}$$

eller [0.86, 1.74]

Konfidsensintervall

- Det är frestande att tolka detta som att $[0.86, 1.74]$ med 95% sannolikhet "täcker in" μ
- Denna tolkning är **FEL** eftersom det "inte finns någon slump kvar", det är ju intervallgränserna i härledningen som är stokastiska inte de observerade intervallgränserna och μ är ju deterministisk

Konfidensintervall

- Den korrekta tolkningen är att om vi gör/observerar många 95%-iga konfidensintervall (inte bara i situationen ovan utan allmänt) kommer 95% av dessa att täcka parametrarna de "uttalar" sig om
- Om vi vill kan vi säga att vi täcker parametern med 95% konfidens, men att efter att man observerat ett stickprov göra ett utlåtande om med vilken sannolikhet man täcker parametern är alltså inte möjligt

Konfidensintervall

- Det är vanligt att man gör 95%-iga konfidensintervall men om vi i situationen med ett okänt väntevärde för en normalfördelning med känd varians vill göra ett $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -igt konfidensintervall får vi detta genom att ersätta 1.96 med $z_{\alpha/2}$ där

$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$$

- Konfidensintervallet blir då

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$$

- Om *konfidensgraden* ökas blir alltså intervallet bredare (om man ska ha 100% konfidens blir intervallet hur brett som helst)

Konfidsensintervall

- Det finns alltså en "trade-off" mellan konfidsensgrad och stickprovsstorlek
- Om vi i situationen ovan och för en given konfidsensgrad vill ha en viss bredd på vårt konfidsensintervall kan vi räkna ut hur stort stickprov som behövs
- Låt $E = z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$. Då har vi ju att

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2$$

Exempel

- Om vi i situationen ovan vill göra ett 95%-igt konfidensintervall med bredd 0.4 har vi alltså $E = 0.2$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, $\sigma = 0.5$ får vi

$$n = \left(\frac{1.96 \cdot 0.5}{0.2} \right)^2 \approx 24.01$$

- Vi avrundar uppåt till 25

Ensidiga konfidensgränser

- De konfidensintervall vi hittills sett är *tvåsidiga*, de har alltså både undre och övre gräns
- Vi kan också göra *ensidiga* konfidensintervall, eller *konfidensgränser* som har antingen en undre eller en övre gräns

Ensidiga konfidenstränser

- I situationen ovan får vi en övre 95%-ig konfidensträns ur

$$\bar{x} + 1.64 \sigma / \sqrt{n}$$

- En undre 95%-ig konfidensträns ges av

$$\bar{x} - 1.64 \sigma / \sqrt{n}$$

Observation

- Vi har alltså lagt "hela α " på ena sidan, minns att $\Phi(1.64) = 0.95$
- Om vi istället vill göra ensidiga $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -iga konfidensgränser ersätter vi 1.64 med z_α där $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$

Om variansen är okänd då?

- Om man har stora stickprov (typ $n = 100$) får man ett $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -igt konfidensintervall för μ i normalfördelningen ur

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} s / \sqrt{n}$$

där s är den observerade stickprovsstandardavvikelsen, alltså

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right)}$$

Mer allmänt vid stora stickprov

- Om den skattare $\hat{\theta}$ man använder för att punktskatta sin parameter θ är approximativt normalfördelad, asymptotiskt vvr och har en standardavvikelse som kan skattas från data med skattaren $\sigma_{\hat{\theta}}$ får vi vid ett stort stickprov ett $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -igt konfidensintervall för θ ur

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\theta}}$$

Exempel

- På FL 9 såg vi att ML-skattaren för a i en likformig fördelning på $[0, a]$ är $\hat{a} = \max(X_i)$
- Vi vet att ML-skattare är asymptotiskt vvr och approximativ normalfördelade
- Vi såg också att variansen för $\hat{a}$ är $\frac{n}{(n+2)(n+1)^2} a^2$ så
$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}} \hat{a} \approx \frac{\hat{a}}{n}$$
- Så vi får ett 95% KI för a ur $\hat{a} \pm 1.96 \frac{\hat{a}}{n}$

Om variansen är okänd då?

- Om man har små stickprov (typ $n < 100$) får man ett $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -igt konfidensintervall för μ i normalfördelningen ur

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} s / \sqrt{n}$$

- Och nu undrar ni: vad är $t_{\alpha/2, n-1}$?!?!?

t -fördelning

- Givet stickprovet $X_1, \dots, X_n$ från en normalfördelning med (okänt) väntevärde μ och (okänd) varians σ^2 säger man att

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

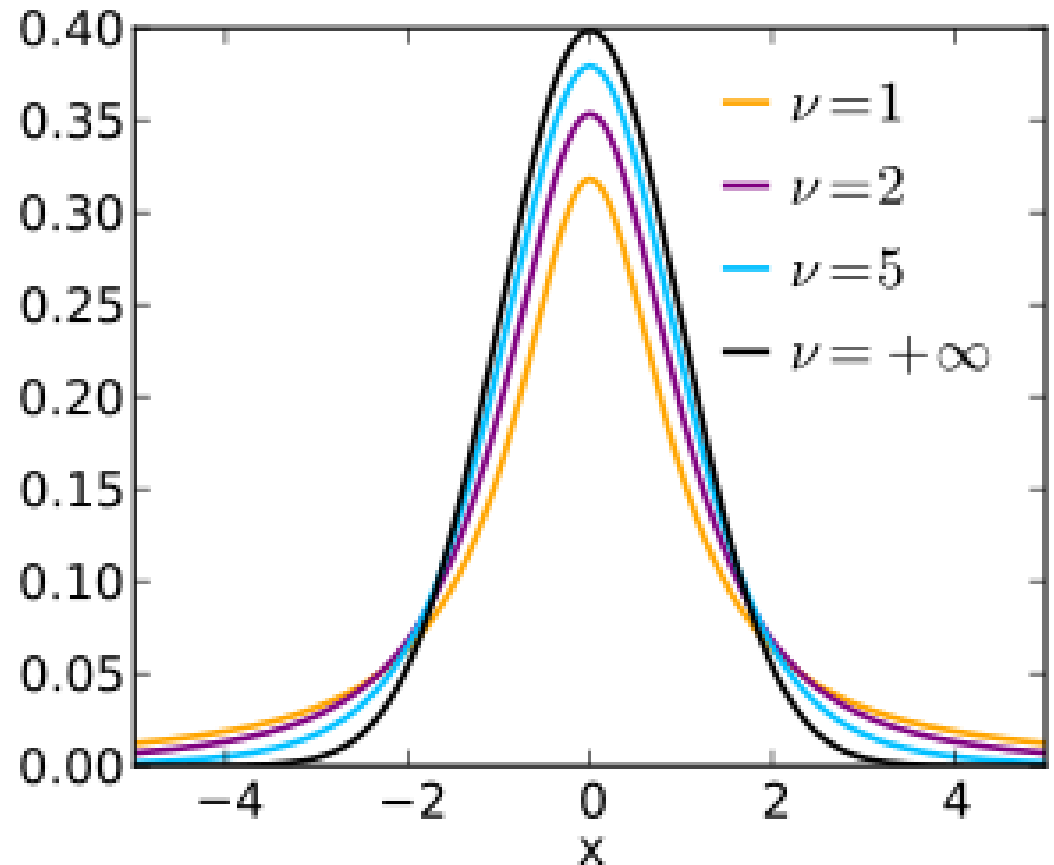
är t -fördelad med $n - 1$ frihetsgrader

t -fördelning

- t -fördelningen uppkommer alltså då vi i "kvoten" byter ut populationsstandardavvikelsen mot stickprovsstandardavvikelsen
- t -fördelningen påminner om standard normalfördelningen eftersom täthetsfunktionen är en symmetrisk (runt y -axeln) klockform

t -fördelning

Täthetsfunktionen
för t -fördelning
med 1, 2, 5 och
”våldigt många”
frihetsgrader



t -fördelning

- Vi ser alltså att t -fördelningen (för låga frihetsgrader) har ”tyngre svansar” än standard normal, den ger alltså större sannolikhet (än standard normal) åt utfall långt ifrån noll
- Det är ju rimligt att S (i någon mening) konvergerar mot σ då stickprovet växer och detta avspeglas i t -fördelningen med att den konvergerar mot standard normal då stickprovet växer

t -fördelning

- Talet $t_{\alpha/2, n-1}$ är alltså det tal sådant att

$$P(T_{n-1} \leq t_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha/2$$

där T_{n-1} är t -fördelad med $n - 1$ frihetsgrader

- Det finns inga slutna uttryck för sannolikheter av typ den ovan men vi finner talen $t_{\alpha/2, n-1}$ i appendix

Exempel

- Om vi återigen observerar 1.3, 1.4, 1.5, 1.1, 1.2 från en normalfördelning fast nu med okänd varians och vill göra ett 95%-igt konfidensintervall behöver vi alltså beräkna s
- Vi har att

$$s^2 = \frac{1}{4} (1.3^2 + 1.4^2 + 1.5^2 + 1.1^2 + 1.2^2 - 5 \cdot 1.3^2) = 0.025$$

Exempel

- Så vi har alltså $s \approx 0.158$
- Vi finner $t_{0.025,4} = 2.78$ i appendix
- Vi får alltså konfidensintervallet

$$1.3 \pm 2.78 \cdot 0.158/\sqrt{5}$$

eller $[1.10, 1.50]$

Viktigt

- Observera att intervallet för väntevärdet då variansen är okänd och stickprovet är litet förutsätter normalfördelade data
- Man måste alltså verifiera/anta att data kan anses normalfördelade om det ska vara meningsfullt att konstruera ett "sådant intervall"