# TMS136

Föreläsning 2

# Sannolikheter

- För en händelse $E$ skriver vi sannolikheten att $E$ inträffar som

$$P(E)$$

- För en händelse $E$ skriver vi sannolikheten att $E$ inte inträffar som

$$P(E')$$

# Exempel

- Låt $E$ vara händelsen att en tärning visar fler än fyra prickar. Då är

$$P(E) = \frac{1}{3} \text{ och } P(E') = \frac{2}{3}$$

# Sannolikheter

- För händelserna $A$ och $B$ skriver vi sannolikheten att åtminstone en av dem inträffar som

$$P(A \cup B)$$

- För händelserna $A$ och $B$ skriver vi sannolikheten att båda inträffar som

$$P(A \cap B)$$

# Exempel

- Låt $A$ vara händelsen att tärningen visar tre eller fler prickar och $B$ vara händelsen att tärningen visar en prick. Då är

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{ och } P(A \cap B) = 0$$

# Sannolikhetsaxiomen

- Grundstenarna på vilka sannolikhetsteorin byggs kallas *sannolikhetsaxiomen*

- $P(S) = 1$

- $0 \leq P(A) \leq 1$

- Om $A \cap B = \emptyset$ så $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

# Följder av axiomen

- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Om $A$ är en delmängd av $B$ så $P(A) \leq P(B)$
- Det är en bra övning att verifiera dessa samband utifrån axiomen och grafiskt m h a Venn-diagram!

# Första följdresultatet

- Observera att $S = A \cup A'$ och $A \cap A' = \emptyset$ så första och tredje axiomet ger

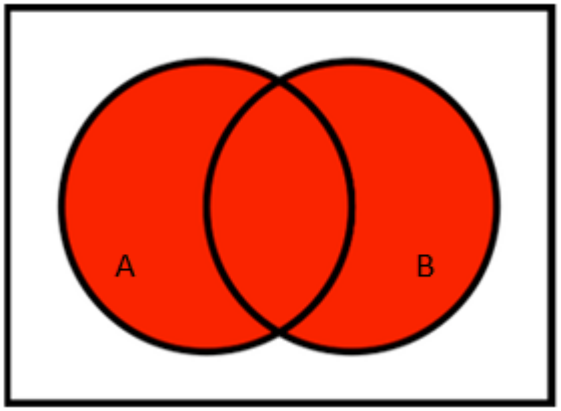
$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

- Vilket ju är det samma som

$$P(A') = 1 - P(A)$$

# Observation

- Intuitionen kring additionsregeln $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ är att om man vill räkna vad som finns i åtminstone en av $A$ eller $B$ och räknar allt som finns i $A$ och lägger till allt som finns i $B$ så har man räknat det finns i både $A$ och $B$ två gånger



# Exempel

- Sannolikheten att det regnar idag är 0.6, därför är sannolikheten att det inte regnar 0.4

- Sannolikheten att tärningen visar udda eller större än 3 är 1/2+1/2-1/6=5/6

- Sannolikheten att tärningen visar mindre än 3 är 1/3 och sannolikheten att den visar mindre än 4 är 1/2

# Flera händelser

- Sambandet $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kallas alltså *additionsregeln* och kan generaliseras till att gälla fler än två händelser

- För tre händelser $A, B, C$ får man (Venn-diagram) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

# Exempel

- Mattias är i sportaffären. Slh att han köper ett par sockar är 0.7, slh att han köper ett par skor är 0.3, slh att han köper en boll är 0.2, slh att han köper både sockar och skor är 0.25, slh att han köper både sockar och boll är 0.15, slh att han köper både skor och boll är 0.12 och slh att han köper alla tre grejerna är 0.05. Vad är slh att han köper åtminstone en av grejerna?

# Exempel forts.

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0.7 + 0.3 + 0.2 - 0.25 - 0.15 - 0.12 + 0.05$$
$$= 0.73$$

# Ömsesidigt uteslutande eller disjunkta händelser

- Om det för händelserna $E_1, \dots, E_k$ gäller att $E_i \cap E_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$ gäller även att (upprepad användning av axiom 3)

$$P(E_1 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + \cdots + P(E_k)$$

- Speciellt har vi (obs att ∩ ”binder hårdare” än ∪)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B \cup A \cap B') \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \end{aligned}$$

# Observationer

- Att ∩ ”binder hårdare” än ∪ kan jämföras med att multiplikation prioriteras över addition i ”vanlig” aritmetik

- Från axiomen/Venn-diagram kan man även observera att (De Morgans lagar)

$$P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big)$$

$$P\big((A \cap B)'\big) = P(A' \cup B')$$

# Betingad sannolikhet

- I vissa sammanhang påverkas sannolikheten för en viss händelse av en annan händelse

- För två händelser $A$ och $B$ ges den *betingade sannolikheten (conditional probability)* för ”$A$ givet $B$” av

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Vi kan tänka på detta som att vi reducerar utfallsrummet till händelsen $B$

# Exempel

- Vi ser från exemplet om Mattias i sportaffären att om nu $A$ är ”köpa sockar”, $B$ är ”köpa skor” (och $C$ är ”köpa boll”) har vi att sannolikheten att Mattias köper ett par sockar givet att han köper ett par skor är

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.3} \approx 0.83$$

# Bayes sats

- Bayes sats (följer ur definitionen av betingad slh)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Sannolikheten att Mattias köper ett par skor givet att han köper ett par sockar kan alltså beräknas som

$$P(B|A) = \frac{\left(\frac{0.25}{0.3}\right) \cdot 0.3}{0.7} \approx 0.36$$

- Observera att det räcker att veta $P(A|B)$…

# Total sannolikhet

- Observera att man med hjälp av betingad sannolikhet kan skriva

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$
$$= P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')$$

- Om det för händelserna $E_1, \dots, E_k$ gäller att $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ och $E_i \cap E_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$ kan vi skriva

$$P(A) = P(A \cap E_1) + \cdots + P(A \cap E_k)$$
$$= P(A|E_1)P(E_1) + \cdots + P(A|E_k)P(E_k)$$

# Bayes sats för flera händelser

- Om det för händelserna $E_1, \dots, E_k$ gäller att $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$ och $E_i \cap E_j$ för alla $i \neq j$ har vi för händelsen $A$ med $\mathrm{P}(A) > 0$ att

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A|E_1)P(E_1) + \cdots + P(A|E_k)P(E_k)}$$

# Oberoende händelser

- Två händelser $A$ och $B$ är *oberoende (independent) om*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Låt $A$ vara händelsen en tärning visar 6 i första kastet och $B$ vara det andra kastet blir en sexa.

- Då är $P(A \cap B) = 1/36$ (ett av 36 möjliga utfall) och $P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1/36$

# Vanliga missuppfattningar

- Om man står vid roulettehjulet på Casino Cosmopol och ser att det har blivit rött fem gånger på rad så är sannolikheten större att det blir svart på nästa snurr än om det hade varit rött två gånger på rad

- FEL! FEL! FEL! Varje snurr på roulettehjulet är oberoende av varje annan snurr

- Att det däremot tenderar att bli lika många röda som svarta över lång tid är en annan femma…

# Oberoende händelser

- Definitionen $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ är ekvivalent med (de ekvivalenta sambanden)

$$P(A|B) = P(A) \text{ och } P(B|A) = P(B)$$

- Övning: Visa att $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ger att $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

# Observation

- Om $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$ och $A \cap B = \emptyset$ så kan inte $A$ och $B$ vara oberoende

$$P(A \cap B) = 0 \text{ men } P(A)P(B) > 0$$

- Om $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$ och $A$ och $B$ är oberoende så kan det inte gälla att $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$$

# Slumpvariabler eller stokastiska variabler

- En *stokastisk variabel (random variable)* $X$ är en funktion från utfallsrummet till de reella talen

$$X: S \to \mathbb{R}$$

- Till exempel kan vi låta $X$ vara förtjänsten i ett spel med tärningskast där du vinner $1 om tärningen visar fem eller sex prickar, får pengarna tillbaka om tärningen visar tre eller fyra prickar och förlorar $1 om tärningen visar en eller två prickar

# Stokastiska variabler

- I tärningsspelet har vi att

$$P(X = 1) = P(X = 0) = P(X = -1) = 1/3$$

- I tärningsspelet är $X$ *diskret* eftersom $X$ tar värden i en diskret mängd (enstaka punkter)

- En stokastisk variabel kallas *kontinuerlig* om den värden i ett intervall

# Exempel

- Kontinuerliga: Vikt, elektrisk spänning, vätskevolym,...
- Diskreta: Antal landningar på månen under universums livslängd, antalet felaktigt överförda bits på ditt bredband, antalet försenade tåg mellan Stockholm och Göteborg...
- Man bör observera att man till exempel för elektrisk spänning troligen har en viss mätnoggrannhet hos sin voltmeter och att detta borde göra spänningen diskret. Men troligen kan instrumentet visa så många olika värden att det är behändigare att betrakta spänningen som kontinuerlig.
- Andelen (inte antalet) felaktigt överförda bits på ditt bredband är diskret (eller hur?) men i praktiken är det behändigare att modellera den som kontinuerlig (varför?).