

TMS136

Föreläsning 8

Stickprov

- Minns att ett *stickprov* (som inte ännu är observerat) är en uppsättning oberoende och likafördelade s.v.

$$X_1, \dots, X_n$$

- En funktion av stickprovet kallas *statistika*
- Till exempel har vi statistikorna stickprovsmedelvärde och stickprovsvarians, alltså:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{och} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Samplingsfördelning

- Fördelningen för en statistika kallas *samplingsfördelning*
- Vi vet att om stickprovet kommer från en normalfördelning så är stickprovsmedelvärdet normalfördelat
- Vi vet också (CGS) att stickprovsmedelvärdet är approximativt normalfördelat om bara stickprovet är någorlunda stort oavsett vilken fördelning stickprovet kommer ifrån

Samplingsfördelning

- Som tidigare antytts är CGS ett kraftfullt verktyg
- Ibland är man intresserad av att jämföra väntevärdena för två oberoende populationer
- Detta gör man lämpligen genom att ta stickprov från de två populationerna och analysera skillnaden i stickprovsmedelvärden

Samplingsfördelning

- Vi låter $\bar{X}_1$ vara stickprovsmedelvärdet från den ena populationen och $\bar{X}_2$ vara stickprovsmedelvärdet från den andra populationen
- Om väntevärdena och standardavvikelserna är μ_1 och μ_2 respektive σ_1 och σ_2 och stickprovsstorlekarna är n_1 och n_2 ger CGS approximativ standard normalfördelning för

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

Samplingsfördelning

- Att kvoten på föregående slide är approximativt normalfördelad innebär att vi med ett på förhand specificerat mått av osäkerhet kan utesluta att det är en slump att populationsmedelvärdena/väntevärdena verkar olika
- Detta, som är en del av det som kallas hypotesprövning, ska vi fördjupa oss i framöver!

Skattare

- En *skattare (estimator)* är en statistiska som används för att uttala sig om populationsparametrar
- Till exempel har vi

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{och} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

som används för att skatta μ respektive σ^2

Skattning

- Om vi använder en viss skattare och beräknar dess värde från ett observerat stickprov kallas det observerade värdet på skattaren för *skattning* (*estimate*)
- Om vi observerar 1.2, 1.4, 1.5, 0.9, 0.8 från någon fördelning och vill skatta fördelningens väntevärde kan vi använda skattaren $\bar{X}$ och vår skattning blir

$$\bar{x} = \frac{1.2 + 1.4 + 1.5 + 0.9 + 0.8}{5} = 1.16$$

Väntevärdesriktighet

- Det är så klart önskvärt att en skattare i någon mening "är nära" parametern den avser skatta
- Om $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ är en skattare för parametern θ säger vi att $\hat{\theta}$ är *väntevärdesriktig* (*vvr, unbiased*) om

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- Att en skattare är vvr betyder alltså att medelvärdet av många observationer av den kommer nära det den försöker skatta
- Om $\hat{\theta}$ inte är vvr kallas $E(\hat{\theta}) - \theta$ skattarens *bias*

Väntevärdesriktighet exempel

- Stickprovsmedelvärdet och stickprovsvariansen är vvr eftersom

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

och (verifiera likheterna)

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2) \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right) = \sigma^2$$

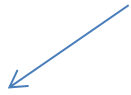
MSE

- Ibland mäter man "hur bra" en skattare är i termer av *medelkvadratfelet (mean squared error)*

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

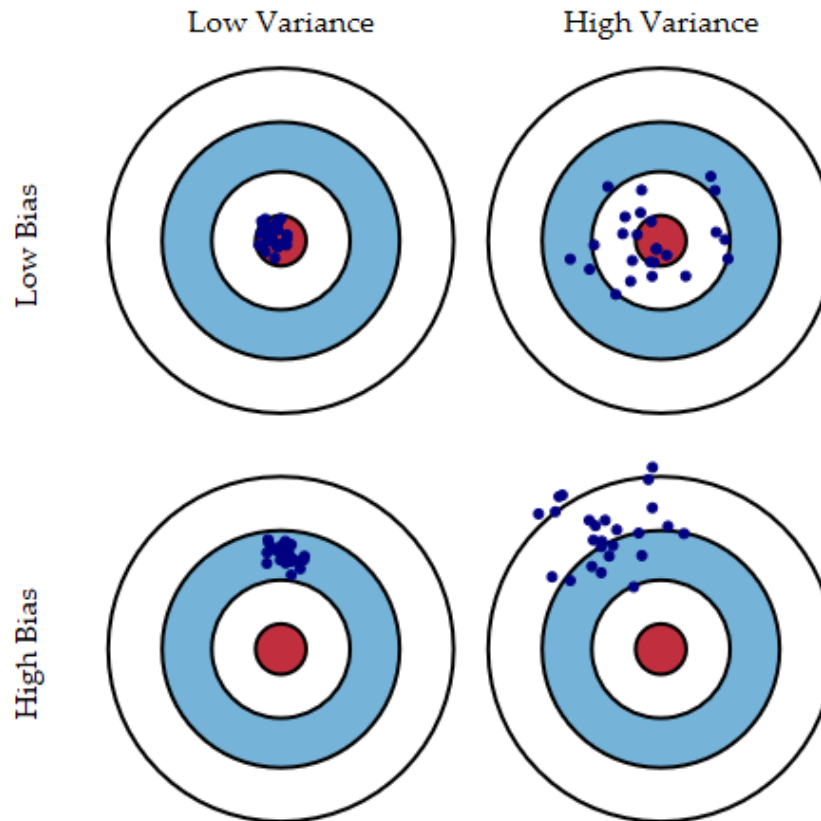
- Observera att

$$MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \left(\theta - E(\hat{\theta}) \right)^2$$

"bias i kvadrat"


Bias vs. Variance

- Ibland väljer man att använda en skattare som inte är vvr över en som är vvr om den som inte är vvr har lägre varians än den som är vvr



Relativ effektivitet

- Om man vill jämföra två skattare (för samma parameter) $\hat{\theta}_1$ och $\hat{\theta}_2$ kan man göra det med hjälp av *relativ effektivitet* (*relative efficiency*)

$$\frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)}$$

- Om kvoten är mindre än ett säger vi att $\hat{\theta}_1$ är mer effektiv än $\hat{\theta}_2$
- Observera att om båda skattarna är vvr så är den med minst varians mest effektiv

Exempel

- Låt X_1 och X_2 vara oberoende s.v. med väntevärde μ och varians σ^2 . Antag vi har skattarna $\hat{\mu}_1 = (X_1 + X_2)/2$ och $\hat{\mu}_2 = (X_1 + 3X_2)/4$ för μ
- Båda är vvr (eller hur?) men $V(\hat{\mu}_1) < V(\hat{\mu}_2)$ (eller hur?) så vi använder hellre $\hat{\mu}_1$