

Lösningar till tentamen i Matematisk statistik och diskret matematik IT (MVE050).

Den 28 augusti 2007.

1. Lösning:

- a) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \approx 0.39\%$
b) Antal möjliga utfall är $\binom{52}{5}$. Av dessa är $4\binom{13}{5}$ gynsamma eftersom det finns precis $\binom{13}{5}$ sätt att välja ut fem kort i en specifik färg (t.ex. hjärter). Sannolikheten för fem likafärgade kort blir alltså: $\frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0.20\%$

2. Lösning:

- a) $X \sim \text{Geom}(\frac{1}{6})$ ger $\sigma_X = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = 6\sqrt{5/6} \approx 5.48$;
b) $Y \sim \text{Bin}(6, \frac{1}{6})$ ger
 $P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.263$

3. Lösning:

$$S = 0.094934$$

- a) Konfidensintervallet ges av:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.05}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.95}^2} \right]$$

där nämnarna kommer från en χ^2 -fördelning med $n-1 = 7$ frihetsgrader, dvs $\chi_{0.05}^2 = 14.1$ och $\chi_{0.95}^2 = 2.17$. Intervallet blir alltså:

$$[0.0045, 0.0291]$$

- b) Då $[0.0045, 0.0291]$ är ett 90%-igt konfidensintervall för variansen så är $[\sqrt{0.0045}, \sqrt{0.0291}] \approx [0.067, 0.171]$ ett 90%-igt konfidensintervall för standardavvikelsen.

4. Lösning:

$$\text{Vi har } F_L(l) = P(L \leq l) = \begin{cases} 0 & , l < 0 \\ \frac{l}{2} & , 0 \leq l \leq 2 \\ 1 & , l > 2 \end{cases} \quad \text{och } f_L(l) = \frac{1}{2}, 0 \leq l \leq 2.$$

$$\text{Väntevärdet blir } E[A] = E[L^2] = \int_0^2 l^2 f_L(l) dl = \int_0^2 \frac{l^2}{2} dl = \left[\frac{l^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

För $0 \leq a \leq 4$ fås: $F_A(a) = P(A \leq a) = P(L^2 \leq a) = P(L \leq \sqrt{a}) = F_L(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2}$, dvs

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & , a < 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{2} & , 0 \leq a \leq 4 \\ 1 & , a > 4 \end{cases}.$$

Derivering ger $f_A(a) = \frac{1}{4\sqrt{a}}, 0 \leq a \leq 4$.

5. Lösning:

- a) Låt X vara antal byten som krävs. $X \sim \text{Po}(5)$ ger $P(X = 5) = \frac{e^{-5}5^5}{5!} \approx 17.5\%$
 b) Låt Y vara antal år till första bytet sker. $Y \sim \text{Exp}(5)$ ger $E[Y] = \frac{1}{5}$ och
 $\text{Var}[Y] = \frac{1}{5^2}$ varav $\sigma_Y = \frac{1}{5}$.

6. Lösning:

- a) $1 + 2x + 3x^2$
 b) $\frac{1-x^5}{1-x} = \frac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x)}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Sekvensen är alltså 1,1,1,1,1.

7. Lösning:

Låt Y vara antal poäng för en slumpmässigt utvald sistaårsgymnasist och x det värde vi söker. Då är approximativt $Y \sim \text{Norm}(500, 100)$ och $\frac{Y-500}{100} \sim \text{Norm}(0, 1)$. Detta ger

$$P(Y \geq a) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-500}{100} \geq \frac{a-500}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{a-500}{100} \approx z_{0.1} \Leftrightarrow a \approx 100z_{0.1} + 500 \approx 628$$

8. Lösning:

Låt $A = \{\text{Alice skickade en etta}\}$ och $B = \{\text{Bob registrerade en etta}\}$.

Då är $P(A) = 0.5$, $P(B|A) = 0.9$ och $P(B|A^C) = 0.2$.

Satsen om total sannolikhet ger

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.55.$$

$$\text{Bayes sats ger nu resultatet } P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.55} \approx 0.82$$

9. Lösning:

$$\hat{p} = \frac{5}{1000} = 0.005$$

Vi väljer att ta fram ett 95%-igt dubbelsidigt konfidensintervall genom att utnyttja att $\hat{p}$ är approximativt normalfördelat:

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} \approx 0.0050 \pm 1.96 \cdot 0.002231 \approx 0.50\% \pm 0.44\%$$

Då hela intervallet ligger under 1% så kan vi hävda (med 95 % konfidens) att kravet är uppfyllt!

Obs: Ett enkelsidigt konfidensintervall (eller test) är starkare och egentligen bättre att använda här, men svaret blir detsamma för given data.