

Tentamen i Matematisk Statistik och Diskret Matematik

Kurskod: MVE055 för Chalmers och MSN620 för Göteborgs Universitet.
När: 2006.10.24, kl 8.30 - 12.30
Plats: VV-salarna i V-huset
Jour : Fredrik Lundin, tfn: 031-772 3549 (070-237 39 26), besöker tentamenssalen
ca kl. 9.30 och 11.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare och Beta.
Betygsgränser: 3:a, 12 p
4:a, 18 p
5:a, 24 p
Maximalt antal poäng är 30.

Läs noga igenom uppgifterna och svara på alla frågorna. Ni ska ange antaganden ni gör, tydligt definiera stokastiska variabler ni använder och använda etablerade beteckningar. Glöm inte bort att svara på frågorna. Detta gäller på alla uppgifterna. Lösningarna ska vara tydliga och välskrivna. Avvikelse kan resultera i poängavdrag.

Uppgift 1

(5 p)

Ta fram och beräkna genererande funktioner för sekvenserna.

- (a) 16, 32, 64, ...
(b) 1, -3, 9, -27, 81, ..., 59049
(c) Om

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

är den genererande funktionen för en sekvens $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ för vilken sekvens är då $A'(x)$ genererande funktion för.

OBS! Med beräkna menas: Om $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ så beräknar vi $G(x)$ till

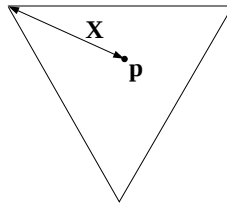
$$G(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Uppgift 2

(3 p)

Under sommaren gjordes en undersökning för att studera hur stor andel av svenskarna som någon gång kört en volvo. Ur telefonkatalogen valdes 55 personer slumpvis och alla svarade på undersökningen. Det visade sig att 15 personer svarade ja. Alla personerna fick också svara på frågan om de hade körkort, och det visade sig att totalt hade 40 körkort och av dessa hade 14 kört en volvo.

- (a) Beräkna en skattning för andelen svenskar som någon gång kört en volvo.
(b) Beräkna en skattning för andelen svenskar med körkort som någon gång kört en volvo.
(c) Konstruera och beräkna ett konfidensintervall för andelen i fråga a.



Figur 1: Illustration till Uppgift 4. Liksidig triangel inom vilken vi väljer en punkt p på måfå.

Uppgift 3

(6 p)

Ett företag ska investera i en ny maskin för att tillverka axlar i snabbstål. För att avgöra vilken maskin som är bäst tillverkades två små provserier om 15 axlar vardera. Båda maskinerna var inställda så att diametern på axlarna borde bli exakt 15 mm, men egentligen vet man inte hur bra inställningarna fungerar så den verkliga axeldiametern kan variera. Axlarna mättes noggrannt och vi fick följande dataserier.

Maskin 1:	15.19	14.72	15.39	14.86	15.49
	15.04	15.22	15.28	14.40	14.74
	14.68	14.52	14.58	13.89	15.16
Maskin 2:	15.03	14.85	14.84	14.81	14.79
	15.00	14.94	15.22	14.99	14.96
	14.84	14.82	15.00	14.83	15.14

Frågan är nu vilken maskin som är bäst?

- (a) Beräkna konfidensintervall för varianserna i de två maskinernas tillverkning. Använd konfidensgrad 0.99. Verkar det som om varianserna är lika? Om olika vilken varians är minst?
- (b) Beräkna ett konfidensintervall för skillnaden mellan de två maskinernas förväntade axeldiametrar. Använd konfidensgrad 0.99.
- (c) Om nu maskinerna skiljer sig åt, vilken kan anses vara bäst?

Uppgift 4

(3 p)

Vi väljer en punkt på måfå i en liksidig triangel och låter X vara avståndet från punkten p till ett av hörnen (se Figur 1). Beräkna

- (a) Fördelningsfunktionen för X .
- (b) Densiteten för X .
- (c) $\mathbb{E}[X]$
- (d) $\text{Var}[X]$

Uppgift 5

(2 p)

Bevisa med hjälp av Venn-diagram formeln

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

för tre händelser A, B och C .

Uppgift 6**(5 p)**

Varje år börjar ca 120 personer på ett av civilingenjörsprogrammen på en svenskt universitet. Det är känt att sannolikheten att hoppa av efter ett läsår är störst efter första året för att sedan avta efter andra och tredje året. Sannolikheten att hoppa av efter fjärde året, dvs med endast exjobbet kvar, är samma som att hoppa av efter trean. Om vi antar att sannolikheten att hoppa av efter 1:an är p_a , sannolikheten för avhopp efter 2:an $0.95p_a$ och sannolikheten för avhopp efter trean är 0.95^2p_a . Statistiken över studenternas avhopp under flera år säger oss att i genomsnitt tar endast 60 av de 120 studenterna som började examen.

- (a) Teckna uttrycket för sannolikheten att en slumpmässigt vald student tar examen.
- (b) Vilken fördelning är rimlig för antalet studenter som till sist tar examen i en slumpvis vald antagningsomgång?
- (c) Hur många studenter förväntas sluta redan efter första året?

Uppgift 7**(3 p)**

Antag att strömmen med kunder till Svalebo blomsterhandel uppe på Högsbohöjd kan modelleras med en Poissonprocess med väntevärde 200 kunder per arbetsdag om åtta timmar. Vi tänker oss en slumpmässigt vald arbetsdag.

- (a) Hur stor är sannolikheten att det kommer så exakt 25 kunder i timmen under två av dagens timmar?
- (b) Hur lång tid dröjer det i genomsnitt mellan två kunder ?

Uppgift 8**(3 p)**

Det lilla försäkringsbolaget Oops (efter de fyra grundarna Olson, Olsson, Petré och Sillén) analyserar sin olyckfallsförsäkring. När en olycka sker och försäkringen utfaller kan företaget själv hantera anspråk på max 50 000 kr, men om det begärda beloppet är större får de i sin tur kontakta sitt försäkringsbolag. För att analysera situationen ansätter de följande modell givet att ett krav är större än 50 000 kr så är beloppet X Pareto-fördelat, med parametrarna $x_T = 50000$ och α .

För Paretofördelningen är x_T tröskelvärdet som X överstiger och α en parameter som beskriver formen på fördelningen. Densiteten och väntevärde för Paretofördelningen är

$$f(x) = \alpha \frac{x_T^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > x_T \quad \text{och} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_T.$$

I tabellen nedan ser vi data (ur Oops ärendestatistik för 2005) över krav som överstiger 50 000 kr.

55484	55570	54547	51518	60171
86500	78275	69932	52318	53280
82235	50600	50099		

Ta fram en maximum likelihood skattning för α och använd den för att beräkna en skattning för väntevärdet av X .

Formelblad

Några statistikor

Statistikan

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

är χ^2 -fördelad med $n-1$ frihetsgrader.

Statistikan

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

är t -fördelad med df frihetsgrader där

$$df = \left\lfloor \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \right\rfloor.$$

Statistikan

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

där

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

är t -fördelad med $n_1 + n_2 - 2$ frihetsgrader.

Statistikan

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_1}{s/\sqrt{n}}$$

där är t -fördelad med $n-1$ frihetsgrader om data är normalfördelade.

Statistikan

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

där är $N(0,1)$ -fördelad om data är normalfördelade.

Några resultat om summor

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ för } |x| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}, \text{ för } |x| < 1$$

Maximum likelihood skattningar

Om $\hat{\mu}$ är en MLE-skattning av en parameter μ och $\theta = f(\mu)$ för någon funktion f . Då är $\hat{\theta} = f(\hat{\mu})$ en MLE-skattning av θ .