Problem

Observationerna $x_1, \ldots, x_n$ är 1 eller 0 beroende på om en viss händelse A inträffar eller ej i försök nr $1, \ldots, n$. Då är $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ antalet gånger som A inträffar i de n försöken. Observera att dessa förutsätts vara oberoende.

Uppgiften består i att dra slutsatser om sannolikheten $p = P[A]$.

Modell

$X_1, \ldots, X_n$ antas vara Ber(p)-fördelade och oberoende. Då är

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

$100(1-\alpha)\%$ confidence interval on p

$$p = \widehat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n} \quad \text{där} \quad \widehat{p} = \frac{X}{n}$$

Denna metod att beräkna konfidensintervall rekommenderas ej då n är under 100. Bättre är

$$p = \widehat{p} \pm t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/(n-1)}$$

ty

$$\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/(n-1)}} \overset{\text{ap}}{\sim} t(n-1)$$

Exempel 9.1.3

The point estimate for the proportion of 16-kbit dynamic RAMs that function correctly for at least 1000 hours based on a sample of size 100 is 0.91. From the standard normal table, the point required to construct a 95% confidence interval on p is $z_{0.025} = 1.96$. The bounds for the confidence interval are

$$\widehat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n}$$

or

$$p = 0.91 \pm 1.96\sqrt{0.91 \cdot 0.09/100} = 0.91 \pm .056$$

Möjligen ska man byta $z_{0.025} = 1.96$ mot $t_{99,0.025} = 1.984$ och istället räkna ut

$$p = 0.91 \pm 1.984\sqrt{0.91 \cdot 0.09/99} = 0.91 \pm .057$$

Exempel 9.1.4

How large a sample is required to estimate the proportion of 16-kbit dynamic RAMs that function properly during the first 1000 hours of use to within 0.01 (1 percentage point) with 95% confidence? We do have a prior estimate of p available, namely $\widehat{p} = 0.91$.

Ur

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n} = 0.01$$

får vi

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\,\widehat{p}(1-\widehat{p})}{0.01^2} = \frac{1.96^2 \cdot 0.91 \cdot 0.09}{0.01^2} \approx 3147$$

Test statistic for testing $H_0: p = p_0$, $p \le p_0$ or $p \ge p_0$

Då $p = p_0$ är

$$\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{ap}}{\sim} N(0,1)$$

Exempel (j.f.r ex 9.1.3)

Antag att vi vill påvisa att funktionssannolikheten p för den typ av 16-kbit RAM som studerades i exemplena 9.1.3 och 9.1.4 är större än 0.90. I exempel 9.1.3 redogjordes för ett försök där man med ett stickprov av storlek $n = 100$ skattade p till $\widehat{p} = 0.91$. Har man då lyckats göra det troligt att $p > 0.90$?

Vi testar $H_0: p \le 0.90$ mot $H_1: p > 0.90$. Teststatistika är

$$\frac{\widehat{p} - 0.90}{\sqrt{0.90 \cdot 0.10/100}} \approx Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Observerat värde är

$$\frac{\widehat{p} - 0.90}{\sqrt{0.90 \cdot 0.10/100}} = \frac{0.91 - 0.90}{\sqrt{0.90 \cdot 0.10/100}} = 0.33$$

Då P-värdet är $\approx P(Z \ge 0.33) = 1 - \Phi(0.33) \approx 0.37$ finns det ingen anledning att förkasta nollantagandet $p \le 0.90$.

Om det nu är så att $p \approx 0.91$, hur stort stickprov behöver vi för att förkasta $H_0: p \le 0.90$ med rimlig sannolikhet, säg 0.9?

Forts (j.f.r ex 9.1.4)

Hur stort stickprov behövs för att med sannolikheten 0.9 förkasta $H_0: p \le 0.90$ och därmed upptäcka att $p > 0.90$ om $p = 0.91$?

Notera först att vi förkastar på nivån $\alpha = 0.05$ om observerat värde på teststatistikan ≥ 1.645 (ty $P(Z \ge 1.645) = 0.05$). Så testet ska förkasta då

$$\frac{\widehat{p} - 0.90}{\sqrt{0.90 \cdot 0.10/n}} \ge 1.645$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{p} \ge 0.9 + 1.645\sqrt{0.9 \cdot 0.1/n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{p} \ge 0.9 + 0.4935/\sqrt{n}$$

Notera sedan att om $p = 0.91$, så är

$$\widehat{p} \overset{\text{ap}}{\sim} \mathrm{N}(0.91, \sqrt{0.91 \cdot 0.09/n})$$

Vårt villkor på n är därför

$$P\left(\widehat{p} \ge 0.9 + 0.4935/\sqrt{n}\right) = 0.9$$

Obs att $P(Z \ge -1.28155) = 0.9$. Medelst standardisering följer att

$$-1.28155 = -0.0349428\sqrt{n} + 1.72443$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{3.00598}{0.0349428} = 86.03$$

$$\Leftrightarrow \quad n \approx 7400$$

Med denna stickprovsstorlek blir förkastelseregeln

$$\widehat{p} \ge 0.9057 \quad \Leftrightarrow \quad f = n\widehat{p} \ge 6703$$

Modell

Två oberoende Bernoulli-stickprov resulterar i oberoende

$$X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p_i) \quad \text{för} \quad i = 1, 2$$

Point estimator for $p_1 - p_2$

$$\widehat{p_1 - p_2} = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$$

Theorem 9.3.1

For large samples, $\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2$ is approximately normal with mean $p_1 - p_2$ and variance $p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2$.

$100(1-\alpha)\%$ confidence interval on $p_1 - p_2$

$$p_1 - p_2 = \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)/n_1 + \widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)/n_2}$$

Pooled estimator for p when $p_1 = p_2 = p$

$$\widehat{p} = \frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

Test statistic for testing $H_0 : p_1 = p_2$, $p_1 \leq p_2$ or $p_1 \geq p_2$

Då $p_1 = p_2 = p$ är

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{\text{ap}}{\sim} t(n_1 + n_2 - 1) \approx \mathrm{N}(0, 1)$$

Exempel 9.4.2

Man önskar testa $H_0 : p_1 \leq p_2$ mot $H_1 : p_1 > p_2$

Första stickprovet: $n_1 = 100$, $X_1 = 8 \Rightarrow \widehat{p}_1 = 0.08$

Andra stickprovet: $n_2 = 200$, $X_2 = 12 \Rightarrow \widehat{p}_2 = 0.06$

Vi "poolar" data och får

$$\widehat{p} = \frac{8 + 12}{100 + 200} = \frac{20}{300} = 0.067$$

vilket ger

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 0.655$$

Detta utfall är inte vara särskilt signifikant. P-värdet är $\approx P(Z > 0.65) = 1 - \Phi(0.65) \approx 0.25$.