

2 Modeller för tiden till fel

2.1 Tid till fel

Systemets *tillståndsvariabel* x definieras utav att $x = 1$ om systemet är i funktion och $x = 0$ annars.

Den stokastiska process som talar om precis när systemet (komponenten) är i funktion, betecknas $(X(t), t \geq 0)$ och definieras utav att

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{om systemet (komponenten) fungerar kl } t \\ 0 & \text{om systemet (komponenten) ej fungerar kl } t \end{cases}$$

Vi ska tänka oss funktionen $t \mapsto X(t)$ högerkontinuerlig.

Tiden räknad från start till första felet, $T \geq 0$, är slumpmässig.

Tänker vi oss ett system (komponent) som aldrig repareras, så har vi sambandet

$$T > t \Leftrightarrow X(t) = 1$$

Vi ska i detta avsnitt tänka oss att vi har ett sådant system (komponent) och att T är systemets (komponentens) livslängd. Syftet med det är dels att allmänt studera slumpmässigheten i livslängder, dels att införa ett antal livslängdsfördelningar. Vi börjar med det första syftet.

T 's *fördelningsfunktion* är

$$F(t) = P(T \leq t)$$

Vi ska anta att T är kontinuerlig, vilket innebär att $F(t)$ är deriverbar. Vi kallar derivatan $f(t) = F'(t)$ för T 's *täthet*.

Obs att

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t+h)}{h} = \frac{P(T \in (t, t+dt])}{dt} \end{aligned}$$

Således gäller

$$P(T \in (t, t+dt]) = f(t) dt$$

Medelst integration av båda leden fås

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

Ur detta uttryck följer att

$$P(T = t) = 0$$

för alla $t \geq 0$. Speciellt gäller alltså att

$$F(0) = 0$$

Dessutom är $F(t)$ kontinuerlig och monotont växande mot 1.

2.2 Överlevnadsfunktion

Systemets *överlevnadsfunktionen* eller *funktionssannolikhet* eller *tillförlitlighetsfunktion* är

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$

2.3 Felbenägenhet

Betrakta

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t + dt | T > t) &= \frac{P(T \in (t, t + dt])}{P(T > t)} \\ &= \frac{F(t + dt) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t) dt}{R(t)} = z(t) dt \end{aligned}$$

Funktionen

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

kallas för systemets *felbenägenhet* eller *felintensitet*.

Obs att

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \Leftrightarrow z(t)R(t) + R'(t) = 0$$

För en given felbenägenhet $z(t)$ är detta en differentialekvation i $R(t)$. Begynnelsevillkoret är $R(0) = 1$. Lösningen är

$$R(t) = e^{-Z(t)}$$

där

$$Z(t) = \int_0^t z(s) ds$$

är den under tidsintervallet $[0, t]$ *ackumulerade risken*.

Således gäller

$$F(t) = 1 - e^{-Z(t)} = 1 - e^{-\int_0^t z(s) ds}$$

Medelst derivering fås

$$f(t) = z(t)e^{-Z(t)}$$

Ur

$$R(t) = e^{-Z(t)}$$

fås

$$Z(t) = -\log R(t)$$

Deriverar vi detta fås

$$z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

2.4 MTTF, MTBF

Väntevärdet

$$\mu = E[T] = \int_0^\infty t f(t) dt$$

kallas för MTTF—”mean time to failure”—eller MTBF—”mean time between failures”—beroende på sammanhanget. Man använder även förkortningen MTTR—”mean time to repair”. Notera att

$$\text{MTBF} = \text{MTTF} + \text{MTTR}$$

Vid uträkning av MTTF kan ibland följande resultat förenkla:

$$\mu = \int_0^\infty R(t) dt$$

Bokens bevis är baserat på partiell integration. Här är ett bättre bevis:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R(t) dt &= \int_0^\infty \int_t^\infty f(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^s f(s) dt ds = \int_0^\infty s f(s) ds = \mu \end{aligned}$$

Omkastning av integrationsordning är tillåten då funktionerna är positiva.

2.5 Poissonprocessen

Låt $\mathcal{A}$ vara en händelse av något slag, t.ex att en radioaktiv atom delar sig och samtidigt utsöndrar en partikel, att ett samtal ankommer till en växel. Om reparationstiden är försumbar kan vi tänka oss att $\mathcal{A}$ är händelsen att en komponent fallerar.

Vi ska anta nu att tidpunkterna då $\mathcal{A}$ är fördelade enligt en homogen Poissonprocess (HPP). Detta innebär att

1. $\mathcal{A}$ kan inträffa precis när som helst och sannolikheten att $\mathcal{A}$ inträffar i intervallet $(t, t+h]$ beror ej av t och kan skrivas $\lambda h + o(h)$ då $h \rightarrow 0$, där $\lambda > 0$ (obs att $o(h)$ kan vara vilken funktion som helst. Det enda som krävs är att $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$)
2. sannolikheten att $\mathcal{A}$ inträffar mer än en gång i intervallet $(t, t+h]$ är $o(h)$
3. huruvida $\mathcal{A}$ inträffar eller ej i disjunkta tidsintervall är oberoende händelser

Anta att vi påbörjar studiet av händelsen $\mathcal{A}$ vid tidpunkten $t = 0$ och att vi sedan registrerar tidpunkterna då $\mathcal{A}$ inträffar. Låt $N(t)$ vara antalet gånger $\mathcal{A}$ inträffar i intervallet $(0, t]$.

Att $(N(t), t \geq 0)$ är en homogen Poissonprocess betyder att

1. $N(0) = 0$ och funktionen $t \mapsto N(t)$ är högerkontinuerlig,

och att det finns ett $\lambda > 0$ sådant att

2. för $s < t$ gäller att $N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(\lambda(t - s))$,
3. för disjunkta tidsintervall $(s_1, t_1], \dots, (s_k, t_k]$ gäller att ökningarna $N(t_1) - N(s_1), \dots, N(t_k) - N(s_k)$ är oberoende stokastiska variabler.

Vi noterar att $\lambda = E[N(t)]/t$. Följaktligen brukar man kalla λ för processens *intensitet* ("rate" på engelska).

Låt $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ vara tidpunkterna då $\mathcal{A}$ inträffar. Vi ser att

$$T_k > t \Leftrightarrow N(t) < k$$

Således gäller att

$$R_{T_k}(t) = P(T_k > t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Medelst derivering och teckenbyte får vi T_k 's täthet. Vi avstår ifrån detaljerna och noterar bara att

$$f_{T_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Den här fördelningen kallas för *gammafördelningen* och betecknas $\Gamma(k, \lambda)$.

Notera att $\Gamma(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$. Tiden tills $\mathcal{A}$ inträffar första gången är alltså exponentialfördelad med parameter λ .

Exempel 2.1 Här söks fördelningen för $T_1 | (N(t_0) = 1)$. Man antar alltså att exakt en händelse inträffade i tidsintervallet $[0, t_0]$ och är intresserad av när denna händelse inträffade.

Det visar sig att $T_1 | (N(t_0) = 1) \sim U[0, t_0]$. $\square$

Exempel 2.2 Antag att fel inträffar i enlighet med en homogen Poissonprocess $(N(t), t \geq 0)$ med intensitet λ . Vissa fel leder till en konsekvens C , medan andra inte gör det. Låt p vara sannolikheten att ett fel leder till en C -konsekvens och antag att händelserna huruvida ett fel leder till en C -konsekvens eller ej är oberoende.

Det visar sig att $(Y_C(t), t \geq 0)$ är en homogen Poissonprocess med intensitet $p\lambda$. $\square$

2.6 Exponentialfördelningen

Att $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ innebär att T har tätheten

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda} \quad \text{för } t \geq 0$$

Således är tillförlitlighetsfunktionen

$$R(t) = \int_t^\infty f(s) ds = e^{-\lambda t}$$

och felbenägenheten

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$$

Att felbenägenheten är konstant är speciellt för exponentialfördelningen. Det gäller ju att felbenägenheten unikt definierar livslängdsfördelningen. Exponentialfördelningens s.k. *glömskeegenskapen* är

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t)$$

Den visas lätt medelst insättning i h.l av

$$P(T > s + t | T > s) = \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)}$$

Detta gör att en använd enhet är "as good as new". Detta är alltså aldrig någon idé att byta ut en komponent med exponentialfördelad livslängd.

MTTF för $\text{Exp}(\lambda)$ är

$$\mu = E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

(utför integrationen eller titta i Beta). Vidare,

$$\text{Var}[T] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exempel 2.3 Låt för $i = 1, 2$, $T_i \sim \text{exp}(\lambda_i)$ och oberoende. Då

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2) &= \int_0^\infty P(T_2 > T_1 | T_1 = t) f_{T_1}(t) dt = \int_0^\infty P(T_2 > t | T_1 = t) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty P(T_2 > t) f_{T_1}(t) dt = \dots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Analogt, om man har n komponenter med oberoende exponentialfördelade livstider med respektive felbenägenheter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, så är sannolikheten att komponent j fallerar först lika med

$$\frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

□

2.9 Weibullfördelningen

T är *Weibullfördelad* med parametrar $\alpha > 0$ och $\lambda > 0$, om T 's täthet är

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} \quad \text{för } t \geq 0$$

Parametern α definierar fördelningens form och $1/\lambda$ är dess skala. Överlevnadsfunktion fås medelst integration till

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^\alpha}$$

Således blir felbenägenheten

$$z(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha-1}$$

Serie- och parallellsystem

Antag att du har ett system bestående av n komponenter med oberoende livslängder $T_1, \dots, T_n$. Låt den (hela) systemets livstid vara T_S .

Om komponenterna är kopplade i *serie*, så är $T_S = \min_i T_i$.

Om komponenterna är kopplade *parallellt*, så är $T_S = \max_i T_i$.

Exempel 2.4 Komponenter med oberoende Weibullfördelade livslängder kopplade i serie. Samma formparameter. Antag att $T_i \sim \text{Wei}(\alpha, \lambda_i)$ för $i = 1, \dots, n$ och oberoende. Då är seriesystemets livslängd $T_S = \min_i T_i$ och det är lätt att se att motsv överlevnadsfunktion är

$$R_S(t) = e^{-(\sum_i \lambda_i^\alpha) t^\alpha}$$

T_S är alltså också Weibullfördelad. □

2.10 Normalfördelningen

Observera att bokens beteckning är $N(\nu, \tau^2)$.

Läs själva om normalfördelningen i grundkursboken.

Viktigt att komma ihåg att

$$X \sim N(\nu, \tau^2) \Rightarrow \frac{X - \nu}{\tau} \sim N(0, 1)$$

samt att $N(0, 1)$ -fördelningens täthet är

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

och att motsv fördelningsfunktion betecknas $\Phi(t)$.

Obs att $N(0, 1)$ -fördelningen lever på hela talaxeln, så att om $P(T < 0)$ ej är försumbart liten, måste man betinga med att $T \geq 0$. Överlevnadsfunktion blir då

$$R(t) = P(T > t | T \geq 0) = \frac{P(T > t)}{P(T \geq 0)} = \frac{1 - \Phi((t - \nu)/\tau)}{1 - \Phi(-\nu)/\tau} = \frac{\Phi((\nu - t)/\tau)}{\Phi(\nu)/\tau}$$

Utifrån detta uttryck kan man nu beräkna fördelningsfunktion $F(t)$, täthet $f(t)$ och felbenägenhet $z(t)$.

2.11 Lognormalfördelningen

T är lognormalfördelad om $Y = \ln T$ är normalfördelad.

Lognormalfördelningen är ofta en bra modell för en komponents reparationstid.

2.16 Familjer av livslängdsfördelningar

IFR, DFR

IFR betyder "increasing failure rate".

DFR betyder "decreasing failure rate".