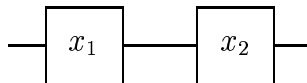


3 Kvalitativ systemanalys

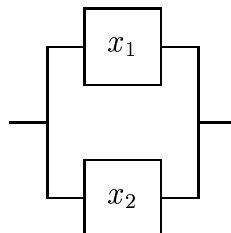
3.4 Block diagram

Serie- och parallellsystem

Ett seriesystem fungerar om, och endast om, samtliga komponenter fungerar.



Ett parallellsystem fungerar om, och endast om, minst en komponent fungerar.



Obs att utseendet av blockdiagrammet ej har med det fysiska utseendet att göra. Exemplifiera t.ex med de fyra hjulen på en personbil.

Strukturfunktionen

Antag att vi har ett system med n komponenter, och låt $x_1, \dots, x_n$ vara deras resp tillståndsvariabler. För komponent i gäller då att den fungerar om $x_i = 1$ och ej om $x_i = 0$.

Låt

$$\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$$

Systemets *strukturfunktion* $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, \dots, x_n)$ ska uppfylla

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om systemet fungerar} \\ 0 & \text{om systemet ej fungerar} \end{cases}$$

Om alla komponenterna är kopplade i serie, så

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_i x_i = \prod_i x_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 1$$

Om alla komponenterna är kopplade parallellt, så

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_i x_i = 1 - \prod_i (1 - x_i) =: \prod_i x_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$$

För $n = 2$ fås

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2) = x_1 \prod x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

***k*-utav-*n*-system**

Ett *k*-utav-*n*-system fungerar om, och endast om, minst *k* av systemets *n* komponenter fungerar. Så

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \sum_i x_i \geq k \\ 0 & \text{om } \sum_i x_i < k \end{cases}$$

Obs att ett 1-utav-*n*-system är detsamma som ett parallell-system och att ett *n*-utav-*n*-system är detsamma som ett serie-system.

För ett 2-utav-3-system gäller att $\phi(x_1, x_2, x_3) = 1$ om, och endast om, $x_1 = x_2 = 1$ eller $x_1 = x_3 = 1$ eller $x_2 = x_3 = 1$. Således gäller att

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 \prod x_1 x_3 \prod x_2 x_3 \\ &= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3)(1 - x_2 x_3) \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

(Obs att $x_i \in \{0, 1\} \Rightarrow x_i^2 = x_i$.)

3.5 Strukturanalys

Ett tillförlitlighetssystem kan innehålla komponenter som varken gör till eller från för systemets funktion (men som kanske är väsentliga i något annat avseende). En sådan komponent kallas *irrelevant*.

Komponent nr 1 är irrelevant om, och endast om, $\phi(\mathbf{x})$ ej beror av x_1 . D.v.s då

$$\phi(0, x_2, \dots, x_n) = \phi(1, x_2, \dots, x_n)$$

Komponent i är irrelevant om, och endast om,

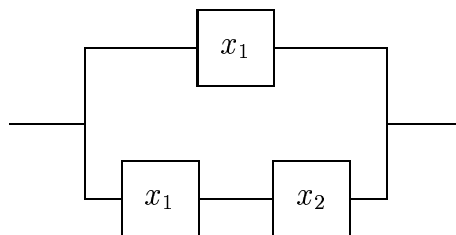
$$\phi(0_i, \mathbf{x}) = \phi(1_i, \mathbf{x})$$

där

$$0_i, \mathbf{x} = x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n$$

$$1_i, \mathbf{x} = x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n$$

Exemplifiera med ett parallellsystem där ena grenan består av komponent 1 och andra av komponent 1 och 2 i serie.



Strukturfunktionen blir då

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 \coprod x_1 x_2$$

Obs att

$$\phi(x_1, 0) = x_1 \coprod 0 = x_1$$

och att

$$\phi(x_1, 1) = x_1 \coprod x_1 = x_1$$

Således är komponent 2 irrelevant. Man hade också kunnat se detta genom att algebraiskt förenkla uttrycket $\phi(x_1, x_2) = x_1 \coprod x_1 x_2$:

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 \coprod x_1 x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_1 x_2) = x_1 + x_1 x_2 - x_1 x_2 = x_1$$

Definition 3.3 Ett system sägs vara *koherent* om det ej innehåller några irrelevanta komponenter, och dess strukturfunktion är icke-avtagande i alla argument.

Systemet är alltså koherent då, och endast då,

$$\phi(0_i, \mathbf{x}) < \phi(1_i, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \forall i$$

Sats 3.1 *För ett koherent system gäller*

$$\phi(\mathbf{0}) = 0$$

$$\phi(\mathbf{1}) = 1$$

Bevis: Antag $\phi(\mathbf{0}) = 1$. Då måste $\phi(\mathbf{1}) = 1$ (ϕ är ju icke-avtagande), så $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{1})$, vilket strider mot antagandet att systemet ej innehåller några irrelevanta komponenter. Att $\phi(\mathbf{1}) = 1$ följer analogt. QED

Sats 3.2 *För ett koherent system gäller*

$$\prod_i x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \coprod_i x_i$$

Bevis: Vänstra olikheten följer av att $\prod_i x_i = 1 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{1} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1$. Den är ju trivialt uppfylld då $\prod_i x_i = 0$. Den högra olikheten är trivial då $\coprod_i x_i = 1$, så den följer ifrån $\coprod_i x_i = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 0$. QED

Vi behöver kunna manipulera tillståndsvariabler. Så låt

$$\mathbf{x} \prod \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1, \dots, x_n y_n = x_1 \prod y_1, \dots, x_n \prod y_n$$

och

$$\mathbf{x} \coprod \mathbf{y} = x_1 \coprod y_1, \dots, x_n \coprod y_n$$

Nästa sats är viktig.

Sats 3.3 *För ett koherent system gäller*

$$\phi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y}) \geq \phi(\mathbf{x}) \coprod \phi(\mathbf{y})$$

$$\phi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \prod \phi(\mathbf{y})$$

Den första av dessa olikheter säger att redundans på komponentnivå är att föredra framför redundans på systemnivå.

Bevis: Notera först att $\mathbf{x} \leq \mathbf{x} \coprod \mathbf{y}$. Således gäller att $\phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y})$. Analogt erhålles $\phi(\mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y})$. Dessa två olikheter medför nu att $\phi(\mathbf{x}) \coprod \phi(\mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y})$.

Analogt gäller att $\mathbf{x} \prod \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, vilket implicerar $\phi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x})$ och vi inser att även $\phi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{y})$ måste vara sann. Därför gäller att $\phi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x}) \prod \phi(\mathbf{y})$. QED

Vägar och avbrott

Definition 3.4 En *väg* eller *vägmängd* är en mängd av komponenter sådan att systemet fungerar om samtliga komponenter i mängden fungerar. En väg är *minimal* om den ej har en strikt delmängd som också är en väg.

Definition 3.5 Ett *avbrott* eller *avbrottsmängd* är en mängd av komponenter sådan att systemet fungerar ej om inga komponenter i mängden fungerar. Ett avbrott är *minimalt* om det ej har en strikt delmängd som också är ett avbrott.

Jag skriver ofta $i_1, \dots, i_k$ för en väg eller ett avbrott istället för $\{i_1, \dots, i_k\}$.

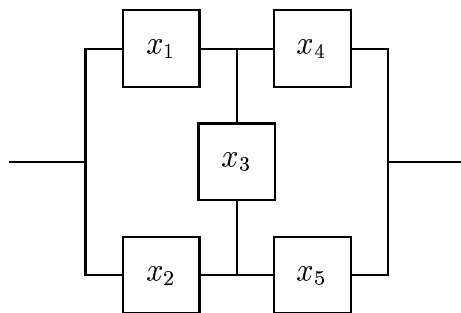
Definitionerna säger att $i_1, \dots, i_k$ är en väg om, och endast om,

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 1 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1$$

och ett avbrott om, och endast om,

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 0$$

Exempel 3.5 Betrakta brostrukturen i figur 3.23.



De minimala vägarna är

$$P_1 = \{1, 4\}, \quad P_2 = \{2, 5\}, \quad P_3 = \{1, 3, 5\}, \quad P_4 = \{2, 3, 4\}$$

Låt

$$\rho_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i$$

Notera att

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \exists j : \rho_j(\mathbf{x}) = 1$$

Således gäller

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_j \rho_j(\mathbf{x}) = \prod_j \prod_{i \in P_j} x_i = x_1 x_4 \sqcup x_2 x_5 \sqcup x_1 x_3 x_5 \sqcup x_2 x_3 x_4$$

Denna parallellstruktur finns uppritad i figur 3.24.

De minimala avbrotten är

$$K_1 = \{1, 2\}, \quad K_2 = \{4, 5\}, \quad K_3 = \{1, 3, 5\}, \quad K_4 = \{2, 3, 4\}$$

Inför

$$\kappa_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in K_j} x_i$$

och notera nu att

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_j \kappa_j(\mathbf{x}) = \prod_j \prod_{i \in K_j} x_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists j : \kappa_j(\mathbf{x}) = 0$$

Således gäller

$$\phi(\mathbf{x}) = (x_1 \sqcup x_2) \prod (x_4 \sqcup x_5) \prod (x_1 \sqcup x_3 \sqcup x_5) \prod (x_2 \sqcup x_3 \sqcup x_4)$$

Denna seriestructur finns uppritad i figur 3.25.

□