4 Oberoende komponenter

4.1 Introduktion

Nu låter vi tillståndsvariablerna vara stokastiska, och skriver

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{om komponent } i \text{ fungerar vid tidpunkten } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och låter i analogi med vad vi just gjort

$$\mathbf{X}(t) = X_1(t), \ldots, X_n(t)$$

Vi låter

$$p_i(t) = P(X_i(t) = 1) = E[X_i(t)]$$

och

$$p_S(t) = P(\phi(\mathbf{X}(t)) = 1) = E[\phi(\mathbf{X}(t))]$$

vara komponent i:s resp hela systemets funktionssannolikhet.

Vi ska i detta avsnitt antaga att komponenterna fungerar oberoende av varandra, d.v.s att $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ är oberoende stokastiska variabler.

4.2 Tillförlitlighet av system

För ett seriesystem bestående av $n = 2$ komponenter gäller att

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = X_1(t)X_2(t)$$

och

$$p_S(t) = E[X_1(t)X_2(t)] = E[X_1(t)]E[X_2(t)] = p_1(t)p_2(t)$$

följer.

För ett paralellsystem bestående av $n = 2$ komponenter gäller att

$$\phi(\mathbf{X}(t)) = 1 - (1 - X_1(t))(1 - X_2(t))$$

vilket ger

$$p_S(t) = 1 - E[(1 - X_1(t))(1 - X_2(t))] = 1 - E[1 - X_1(t)]E[1 - X_2(t)]$$
$$= \ldots = p_1(t) + p_2(t) - p_1(t)p_2(t)$$

Betrakta strukturfunktionen

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \prod (x_2 \coprod x_3)$$

Rita motsv blockdiagram. Notera att

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1(1 - (1 - x_2)(1 - x_3)) = x_1(x_2 + x_3 - x_2 x_3)$$

Således har detta system funktionssannolikheten

$$p_S(t) = p_1(t)(p_2(t) + p_3(t) - p_2(t)p_3(t))$$

Man borde nu se hur man utifrån kännedom om strukturfunktionen $\phi(\mathbf{x})$ direkt kan skriva ned tillförlitligheten $p_S(t)$.

4.3 Icke reparerbara system

Nu gäller på komponentnivå

$$p_i(t) = R_i(t) = P(T_i > t) = e^{-\int_0^t z_i(u)\,du}$$

och på systemnivå

$$p_S(t) = R_S(t) = P(T_S > t) = e^{-\int_0^t z_S(u)\,du}$$

där T_i resp T_s betecknar komponent i:s resp hela systemets livslängd. Motsv felintensiteter är $z_i(t)$ och $z_S(t)$.

Icke reparerbara seriesystem

För ett seriesystem gäller

$$R_S(t) = p_S(t) = \prod_i p_i(t) = \prod_i R_i(t) = \prod_i e^{-\int_0^t z_i(u)\,du} = e^{-\int_0^t \sum_i z_i(u)\,du}$$

Felintensiteten för seriesystemet är alltså summan av komponenternas felintensiteter:

$$z_S(t) = \sum_i z_i(t)$$

Att det tyvärr inte alltid är lätt att beräkna felintensitet för ett parallellsystem förstår vi av det som nu följer.

Icke reparerbara parallellsystem

För ett parallellsystem gäller

$$R_S(t) = E[1 - \prod_i (1 - X_i(t))] = 1 - \prod_i E[1 - X_i(t)] = 1 - \prod_i (1 - R_i(t))$$

I fallet med 2 komponenter fås

$$R_S(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t)$$

Derivering följt av teckenbyte ger oss tätheten

$$f_S(t) = -R'_S(t) = -R'_1(t) - R'_2(t) + R_1(t)R'_2(t) + R'_1(t)R_2(t)$$

och man inser att det inte går att få något slutet snyggt uttryck för felbenägenheten $z_S(t) = f_S(t)/R_S(t)$ i det här fallet.

4.5 Beräkning av systemtillförlitlighet

Vi betraktar en fix tidpunkt t och "droppar" den från notationen, så istället för t.ex $X_i(t)$ skriver vi bara X_i.

Vi har redan sett exempel på hur man beräknar p_S genom att först förenkla strukturfunktionen och sedan ta väntevärde och utnyttja att

$$E\left[\prod_{j=1}^{k} X_{i_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} E\left[X_{i_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} p_j$$

om alla i_j, $j = 1, \ldots, k$, är olika, vilket följer av att komponenterna förutsätts vara oberoende. I sammanhanget kommer vi ihåg att $X_i^2 = X_i$ (de enda möjliga tillstånden är ju 0 och 1).

Vi ska nu lära oss en metod baserad på pivotuppdelning att beräkna strukturfunktion och funktionssannolikhet för hela system.

Pivotuppdelning

Denna teknik bygger på identiteten

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i)\phi(0_i, \mathbf{x})$$

Antag att $n = 2$. Då

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, x_2) &= x_1 \phi(1, x_2) + (1 - x_1)\phi(0, x_2) \\
&= x_1(x_2\phi(1,1) + (1 - x_2)\phi(1,0)) + (1 - x_1)(x_2\phi(0,1) + (1 - x_2)\phi(0,0) \\
&= x_1 x_2 \phi(1,1) + x_1(1 - x_2)\phi(1,0) + (1 - x_1)x_2\phi(0,1) + (1 - x_1)(1 - x_2)\phi(0,0)
\end{aligned}$$

Notera t.ex att

$$x_1(1 - x_2)\phi(1,0) = x_1^1(1 - x_1)^{1-1} x_2^0 (1 - x_2)^{1-0}\phi(1,0)$$

Således kan vi skriva

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{y_1=0}^{1} \sum_{y_2=0}^{1} \left(\prod_j x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1-y_j} \right) \phi(y_1, y_2)$$

Vi förstår att i det allmänna fallet med ett godtyckligt antal komponenter gäller att

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \left(\prod_j x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1-y_j} \right) \phi(\mathbf{y})$$

där alltså den yttre summationen löper över de 2^n tänkbara tillstånden $\mathbf{y}$ för de n komponenterna.

Nu följer

$$p_S = E[\phi(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{y}} \left(\prod_j E[X_j^{y_j}(1-X_j)^{1-y_j}] \right) \phi(\mathbf{y})$$

Notera att

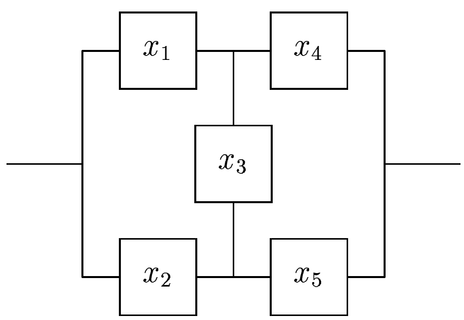
$$E[X^y(1-X)^{1-y}] = \begin{cases} E[X] & \text{då} \quad y=1 \\ 1-E[X] & \text{då} \quad y=0 \end{cases}$$

Således gäller

$$p_S = \sum_{\mathbf{y}} \left(\prod_j p_j^{y_j}(1-p_j)^{1-y_j} \right) \phi(\mathbf{y})$$

Tanken är nu att man först bestämmer (t.ex genom att experimentera) värdet av $\phi(\mathbf{y})$ för de 2^n tänkbara tillstånden $\mathbf{y}$, och sedan sätter in dessa i formeln ovan. Notera att det är bara termer med $\phi(\mathbf{y}) = 1$ som kommer med i summan för p_S.

I tabell 1 visas resultatet av ett sådant experiment. (j.f.r brostrukturen i figur 4.11 i Høyland & Rausand).



Vi får, med ovanstående teknik,

$$\begin{aligned} p_S = {} & (1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5 + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5 \\ & + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5 \\ & + (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5) + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5 \\ & + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5) + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5 \\ & + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5 \\ & + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5 + p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5) \\ & + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5 \end{aligned}$$

#	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\phi(\mathbf{y})$	ev bidrag till p_S
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	
2	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	0	1	1	0	
4	0	0	1	0	0	0	
5	0	0	1	0	1	0	
6	0	0	1	1	0	0	
7	0	0	1	1	1	0	
8	0	1	0	0	0	0	
9	0	1	0	0	1	1	$(1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5$
10	0	1	0	1	0	0	
11	0	1	0	1	1	1	$(1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5$
12	0	1	1	0	0	0	
13	0	1	1	0	1	1	$(1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5$
14	0	1	1	1	0	1	$(1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)$
15	0	1	1	1	1	1	$(1-p_1)p_2p_3p_4p_5$
16	1	0	0	0	0	0	
17	1	0	0	0	1	0	
18	1	0	0	1	0	1	$p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5)$
19	1	0	0	1	1	1	$p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5$
20	1	0	1	0	0	0	
21	1	0	1	0	1	1	$p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5$
22	1	0	1	1	0	1	$p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)$
23	1	0	1	1	1	1	$p_1(1-p_2)p_3p_4p_5$
24	1	1	0	0	0	0	
25	1	1	0	0	1	1	$p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5$
26	1	1	0	1	0	1	$p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)$
27	1	1	0	1	1	1	$p_1p_2(1-p_3)p_4p_5$
28	1	1	1	0	0	0	
29	1	1	1	0	1	1	$p_1p_2p_3(1-p_4)p_5$
30	1	1	1	1	0	1	$p_1p_2p_3p_4(1-p_5)$
31	1	1	1	1	1	1	$p_1p_2p_3p_4p_5$

Tabell 1: Tabell över strukturfunktionen $\phi(\mathbf{y})$ och de resp bidragen till systemtillförlitligheten p_S för brostrukturen i figur 4.11. I kolumnen längst till vänster visas tillståndets nummer.

$$+p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)+p_1p_2(1-p_3)p_4p_5$$
$$+p_1p_2p_3(1-p_4)p_5$$
$$+p_1p_2p_3p_4(1-p_5)+p_1p_2p_3p_4p_5$$

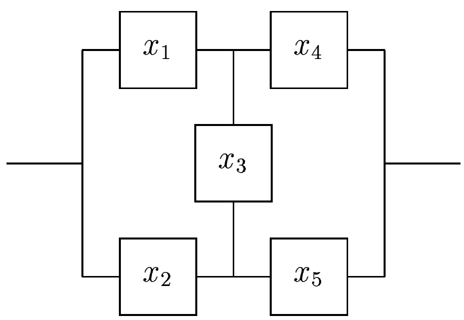
Jag programmerade in detta uttryck i Mathematica, använde den automatiska förenklingen och erhöll, med reservation för alla tänkbara fel,

$$p_S = (p_1 + p_2\,p_3 - p_1\,p_2\,p_3)\;p_4 + p_2\;(1 - p_3\,p_4 + p_1\;(-1+p_3)\;(-1+2\,p_4))\;p_5$$

Minimala vägar och avbrott

(Det som följer här om hur man använder minimala vägar och avbrott till att beräkna strukturfunktion har vi redan gjort. Och att gå ifrån strukturfunktion till tillförlitlighetsfunktion kan vi)

Gå tillbaka till ex 3.5 och brostrukturen i figur 3.23 och 4.11.



De minimala vägarna är

$$P_1=\{1,4\},\quad P_2=\{2,5\},\quad P_3=\{1,3,5\},\quad P_4=\{2,3,4\}$$

Låt

$$\rho_j(\mathbf{X}) = \prod_{i\in P_j} X_i$$

Notera att

$$\phi(\mathbf{X}) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \exists j : \rho_j(\mathbf{X}) = 1$$

Således gäller

$$\phi(\mathbf{X}) = \coprod_j \rho_j(\mathbf{X}) = \coprod_j \prod_{i\in P_j} X_i = X_1X_4 \amalg X_2X_5 \amalg X_1X_3X_5 \amalg X_2X_3X_4$$

Förenkla och utnyttja oberoendet. Då fås tillförlitligheten enkelt.

De minimala avbrotten är

$$K_1 = \{1,2\}, \quad K_2 = \{4,5\}, \quad K_3 = \{1,3,5\}, \quad K_4 = 2,3,4\}$$

Inför

$$\kappa_j(\mathbf{X}) = \coprod_{i \in K_j} X_i$$

och notera nu att

$$\phi(\mathbf{X}) = \prod_j \kappa_j(\mathbf{X}) = \prod_j \coprod_{i \in K_j} X_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{X}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists j : \kappa_j(\mathbf{X}) = 0$$

Således gäller

$$\phi(\mathbf{X}) = (X_1 \amalg X_2) \prod (X_4 \amalg X_5) \prod (X_1 \amalg X_3 \amalg X_5) \prod (X_2 \amalg X_3 \amalg X_5)$$

Denna seriestruktur finns uppritad i figur 3.25.

Förenkla och utnyttja oberoendet. Då fås tillförlitligheten enkelt.

4.6 Redundans

Olika sätt att använda reservkomponenter.

- aktiv redundans (parallellkoppling). Ex med 2 komponenter: $T = \max(T_1, T_2)$
- passiv redundans (man kopplar efterhand in nya komponenter). Ex med 2 komponenter: $T = T_1 + T_2$.

I det senare fallet kan man tänka sig situationer då omkopplingen ej lyckas, vilket man bör ta med i blockdiagrammet.

4.7 Reparerbara system

Definition 4.1: Tillgänglighetsfunktionen för en reparerbar komponent är

$$A(t) = P(X(t) = 1)$$

där $X(t) \in \{0, 1\}$ är komponentens (stokastiska) tillstånd vid tidpunkten t.

Definition 4.2: Otillgänglighetsfunktionen är

$$\bar{A}(t) = 1 - A(t) = P(X(t) = 0)$$

Obs att om komponenten ej är reparerbar, så är

$$A(t) = R(t) = P(T > t)$$

Definition 4.3: Genomsnittlig tillgänglighet i $[0, \tau]$ är

$$A_{av}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A(t)\, dt$$

Obs att gränsvärdet

$$A_{av} = \lim_{\tau \to \infty} A_{av}(\tau)$$

självklart också är en viktig storhet.

5 Komponenternas resp betydelse

5.1 Birnbaums mått

Exempel 5.1: En seriestruktur med 2 komponenter med tillförlitligheten $p_1 = 0.98$ och $p_2 = 0.96$. Strukturens tillförlitlighet blir

$$h(p_1, p_2) = p_1 p_2$$

Birnbaum's measure of the reliability importance är

- för komponent 1:
$$\frac{\partial h(p_1, p_2)}{\partial p_1} = p_2 = 0.96$$
- för komponent 2:
$$\frac{\partial h(p_1, p_2)}{\partial p_2} = p_1 = 0.98$$

Exempel 5.1: Hade komponenterna istället varit kopplade parallellt, så hade tillförlitligheten blivit

$$h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

och Birnbaums mått blivit

- för komponent 1:
$$\frac{\partial h(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 1 - p_2 = 0.04$$
- för komponent 2:
$$\frac{\partial h(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 1 - p_1 = 0.02$$

5.2 Criticality importance

5.3 Vessly-Fussels mått

5.4 Förbättringspotential

5.5 Jämförelser