6 Markovmodeller

Ge ett exempel på ett intensitetsdrivet system. T.ex 4 tillstånd kallade $1, 2, 3$ och 0. Tillstånd 0 är absorberande och innebär failure. Normalt oscillerar processen mellan tillstånden 1 och 2. Ibland kan den gå över i tillstånd 3, som är kritiskt eftersom det ifrån 3 är möjligt att gå till 0. Men det är också möjligt att gå tillbaka till 1 eller 2 ifrån 3.

Modellera ett reparerbart system bestående av 2 parallellkopplade komponenter. Kalla tillstånden $11, 10, 01, 00$. Här innebär endast tillståndet 00 failure.

Modellera ett reparerbart system bestående av 2 seriekopplade komponenter. Kalla tillstånden $11, 10, 01, 00$. Obs att här innebär tillstånden $01, 10, 00$ olika typer av failure.

6.1 Basalt stoff

Inför intensiteter för tillståndsbyten, blanda in exponentialfördelningens två egenskaper

$$T = \min_{1 \leq i \leq k} T_i \sim \mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$$

samt

$$P(T_j = T) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \quad \text{för} \quad 1 \leq j \leq k$$

om $T_1, \ldots, T_k$ är oberoende och $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$ för $i = 1, \ldots, k$.

Man kan resonera så här: Systemet är just nu i ett visst tillstånd. Det kan övergå i totalt k andra tillstånd som vi för enkelhets skull nu kallar $1, \ldots, k$. Intensiteten för övergång (transition) till tillstånd j är λ_j. Den totala intensiteten för transition ut ur det nuvarande tillståndet och in i något av de k tillstånden $1, \ldots, k$ är $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Sannolikheten att systemet övergår ifrån det nuvarande tillståndet till tillstånd j är

$$\lambda_j / \lambda$$

och tidpunkten då detta sker är om

$$T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

tidsenheter.

6.2 Markovprocesser

Låt $X(t)$ vara systemets tillstånd vid tidpunkten t. System som dem beskrivna ovan uppfyller Markovegenskapen, som säger att framtiden är oberoende av vad som hänt tidigare givet nuet:

$$P(X(t+s)=j|X(t)=i, X(u)=x(u) \text{ för } 0 \le u < t) = P(X(t+s)=j|X(t)=i)$$

De är dessutom tidshomogena, d.v.s

$$P(X(t+s)=j|X(t)=i) = P(X(s)=j|X(0)=i) = p_{ij}(s)$$

Vi kallar

$$p_{ij}(t) = P(X(t)=j|X(0)=i)$$

för processens övergångs- eller transitionssannolikheter.

Intensiteten för transition ifrån i till $j \neq i$ är

$$a_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \dot{p}_{ij}(0)$$

ty $p_{ij}(0) = 0$. Obs att vi skriver $\dot{p}_{ij}(t)$ för tidsderivatan av $p_{ij}(t)$. Dessutom är

$$a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$$

totala intensiteten för transition ut ur i.

6.3 Tillståndsekvationerna

Antag att processen vid tidpunkten $t = 0$ startar i tillstånden i med sannolikheten p_i, $i = 1, \ldots, k$ och sätt

$$P_j(t) = P(X(t) = j) \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, k$$

Notera att

$$P_j(t) = P(X(t) = j) = \sum_i P(X(0) = i)P(X(t) = j | X(0) = i) = \sum_i p_i \, p_{ij}(t)$$

Inför intensitetsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{r0} \\ a_{01} & -a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{02} & a_{12} & -a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{0r} & a_{1r} & a_{2r} & \cdots & -a_{rr} \end{bmatrix}$$

och låt

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_r(t) \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{P}_0(t) \\ \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{P}_r(t) \end{bmatrix}$$

Obs att $\mathbf{A}$ är transponatet till den matris som brukar kallas för Markovprocessens generator $\mathbf{G}$. Således är $\mathbf{A} = \mathbf{G}^t$.

Man kan visa att

$$\mathbf{A}\mathbf{P}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)$$

Detaljerna tycker jag inte det finns någon anledning att gå inpå.

6.4 Tidsberoende lösning

Lösningen till systemet av differentialekvationer kan skrivas

$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{P}(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k\right)\mathbf{P}(0)$$

J.f.r med lösningen av den vanliga differentialekvationen $\dot{y}(t) = ky(t)$ med startvillkoret $y(0) = 1$.

I exempel 6.2 tittar man på den allra enklaste Markovprocessen med tillståndsrummet $\{0,1\}$ och intensiteterna $a_{10} = \lambda$ och $a_{01} = \mu$. Här är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mu & \lambda \\ \mu & -\lambda \end{bmatrix}$$

och systemet

$$\begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}_0(t) \\ \dot{P}_1(t) \end{bmatrix}$$

kan man visa löses av

$$\begin{aligned} P_0(t) &= -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ P_1(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

om begynnelsevillkoret är

$$P_0(0) = 0, \quad P_1(0) = 1$$

d.v.s om processen startar i tillståndet 1 vid tidpunkten 0.

Vi ser att

$$\begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \end{bmatrix} \to \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} \quad \text{då} \quad t \to \infty$$

Notera att $P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t)$ är den assymptotiska tillgängligheten. Vi skriver

$$A = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

6.5 Asymptotisk lösning

Låt $t \to \infty$ i ekvationssystemet

$$\mathbf{AP}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)$$

Då fås

$$\mathbf{AP} = \mathbf{0}$$

ty $\lim_t \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$ om det finns en assymptotisk lösning

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} = \lim_t \mathbf{P}(t)$$

P kallas också för de *stationära* eller *invarianta* sannolikheterna.

Låt oss verifiera att de stationära sannolikheterna är

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

i exempel 6.2 där tillståndsrummet är $\{0, 1\}$ och intensitetsmatrisen är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$$

Vi ska alltså lösa

$$\begin{bmatrix} -\mu & \lambda \\ \mu & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D.v.s

$$-\mu P_0 + \lambda P_1 = 0$$
$$\mu P_0 - \lambda P_1 = 0$$

Obs att ekvationerna är linjärt beroende. Båda medför

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda} P_0$$

Vi skaffar oss en unik lösning genom att utnyttja att $P_0 + P_1 = 1$. Således har vi

$$P_0 + \frac{\mu}{\lambda} P_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

och

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda} P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Prestanda (assymptotiska eller medel)

Besöksfrekvensen för tillståndet j är

$$\nu_j = a_{jj} P_j$$

Detta följer ifrån sambandet

$$\nu_j \frac{1}{a_{jj}} = P_j$$

Då processen är i tillståndet j stannar den där i medel

$$\theta_j = \frac{1}{a_{jj}}$$

tidsenheter. Tiden i tillståndet j är ju exponential med paramater a_{jj}

Obs att S består av tillstånden $0, 1, \ldots, r$. Vissa av dessa innebär failure. Låt $F \subset S$ innehålla alla tillstånd som innebär att systemet ej når upp till specificerade prestanda. Låt dessutom $B = S \setminus F$. Systemets (medel-) *tillgänglighet* är

$$A_S = \sum_{j \in B} P_j = 1 - \sum_{j \in F} P_j$$

Systemets *otillgänglighet* är $1 - A_S$.

Høyland & Rausand räknar nu på några speciella system. Bl.a två oberoende komponenter kopplade parallellt och i serie. Det har inte vi tid till.

6.6 MTTF

Gå tillbaka till det allra först nämnda systemet och snacka lite löst om att man kan beräkna (iallafall Laplacetransform för) fördelning för tiden T_S till failure.