7 Räkneprocesser (punktprocesser)

7.1 Inledning

Reparerbara system (subsystem eller komponenter) som initieras vid tidpunkten $t = 0$. Inga reparationstiderna (de antas försumbara).

Failure times är $S_1, S_2, \ldots$ Man brukar också införa $S_0 = 0$.

Interfailure times är $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2 - S_1$, $T_3 = S_3 - S_2$, etc.

Antalet failures i tidsintervallet $(0, t]$ är $N(t)$.

Vi noterar att $N(t)$ är en räkne- eller punktprocess. Sådana uppfyller

Definition 7.1 Varje räkneprocess (punktprocess på linjen) $N(t)$ uppfyller

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t)$ är heltalsvärd,
3. $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$, och
4. $N(t) - N(s)$ är, för $s < t$, antalet failures (impulser) i tidsintervallet $(s, t]$.

Exempel 7.1

Fel nummer $N(t)$	Kalendertid i dagar S_j	Tid till föregående fel i dagar T_j
0	0	0
1	177	177
2	242	65
3	293	51
4	336	43
5	368	32
6	395	27
7	410	15
⋮		

Man får en känsla av att detta systemet gradvis försämras. De realiserade värdena av T_j avtager ju. Sådana system kallas ”sad”. Motsatsen till sad är ”happy”.

Grundläggande definitioner

- Oberoende ökningar: för $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ ska det då gälla att
$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$$
är oberoende.

- Stationära ökningar: för $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ ska det då gälla att
$$N(t_1+s)-N(t_0+s), \ldots, N(t_k+s)-N(t_{k-1}+s) \stackrel{d}{=} N(t_1)-N(t_0), \ldots, N(t_k)-N(t_{k-1})$$
för varje $s > 0$ (tecknet $\stackrel{d}{=}$ utläses ”har samma fördelning som”).

- En stationär räkneprocess har stationära ökningar.

- Det finns icke stationära räkneprocesser. NHPP (se nedan) är en sådan.

- En reguljär räkneprocess uppfyller
$$P\left(N(t+h) - N(t) > 1\right) = o(h) \quad \text{då} \quad h \to 0$$
(Per definition gäller $\lim_h o(h)/h = 0$.)

- ROCOF (rate of occurence of failures):
$$w(t) = W'(t) = \frac{d}{dt} E\left[N(t)\right]$$
Obs att
$$w(t)\, dt = dE\left[N(t)\right] = E[N(t+dt) - N(t)]$$
Om processen är reguljär gäller att $N(t+dt) - N(t) \in \{0, 1\}$ och
$$w(t)\, dt = P\left(N(t+dt) - N(t) = 1\right)$$
(j.f.r med felbenägenheten).

- Tiderna mellan fel (interfailuretiderna). Låt $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$ vara tidpunkterna då fel inträffar. Tiderna mellan fel är
$$T_j = S_j - S_{j-1} \quad \text{för} \quad j = 1, 2, \ldots$$

- Nuvarande komponents återstående livstid:
$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t$$

- Nuvarande komponents ålder
$$Z(t) = t - S_{N(t)}$$

- Nuvarande komponents totala livstid
$$Y(t) + Z(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = T_{N(t)+1}$$

Tre typer av räkneprocesser

1. Homogen Poissonprocess (HPP)
2. Förnyelseprocess (renewal process)
3. Icke-homogen Poissonprocess (NHPP)

7.2 Homogen Poissonprocess (HPP)

Varje HPP har oberoende och stationära ökningar.

ROCOF (intensitetsfunktion) är

$$w(t) = \frac{d}{dt} E\left[N(t)\right] = \lambda$$

ty $W(t) = E[N(t)] = \lambda t$.

Interfailuretiderna (tiderna mellan fel) $T_1, T_2, \ldots$ är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\lambda$.

Tiden för failure nummer r,

$$S_r = T_1 + T_2 + \ldots + T_r$$

är gammafördelad med parametrar r och γ.

”Compound” HPP

Sammansatt (homogen) Poissonprocess säger man kanske på svenska. Failure sker enl en HPP med intensitet λ. Till failure i hör nu en konsekvens V_i. De stokastiska variablerna $V_1, V_2, \ldots$ förutsätts vara oberoende av HPP:n samt inbördes oberoende och fördelade som V.

Den totala (kumulativa) konsekvensen vid tidpunkten t är

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} V_i$$

Dess väntevärde är

$$E\left[Z(t)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} V_i\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \,\middle|\, N(t) = n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, E\left[\sum_{i=1}^{n} V_i \,\middle|\, N(t) = n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, E\left[\sum_{i=1}^{n} V_i\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, nE[V] = \lambda t E[V]$$

M.a.o,

$$E\left[Z(t)\right] = \lambda t E[V] = \lambda t \nu$$

där $\nu = E[V]$.

Vi noterar att man även kan räkna ut $\tau^2 = \mathrm{Var}[Z(t)]$ med samma metodik.

Fördelningsfunktionen för $Z(t)$ kan också beräknas med denna metodik:

$$P(Z(t) \leq z) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \leq z\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \leq z \,\middle|\, N(t) = n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, P\left(\sum_{i=1}^{n} V_i \leq z \,\middle|\, N(t) = n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)\, P\left(\sum_{i=1}^{n} V_i \leq z\right)$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_V^{(n)}(z)$$

där $F_V^{(n)}(z)$ är fördelningsfunktionen för summan av n oberoende V-variabler.

Ofta gäller att $P(V \geq 0) = 1$ (t.ex om konsekvenserna av failure är ekonomiska). Då kan vi införa tiden T_c tills konsekvenserna summerar sig till minst c. Ur

$$T_c > t \quad \Leftrightarrow \quad Z(t) \leq c$$

fås

$$P\left(T_c > t\right) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_V^{(n)}(c)$$

och, via resultatet $E[T] = \int_0^\infty P(T > t)\, dt$, får vi

$$E[T_c] = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_V^{(n)}(c)$$

Høyland & Rausand tittar nu på specialfallet då $V \sim \mathrm{Exp}(\rho)$, kanske eftersom man då relativt lätt kan räkna ut att

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_V^{(n)}(c) = 1 + \rho c$$

och det följer då att

$$E[T_c] = \frac{1 + \rho c}{\lambda}$$

7.3 Förnyelseprocess

Räkneprocessen säges vara en förnyelseprocess om interfailuretiderna $T_1, T_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade. Låt variabeln T ha denna gemensamma fördelning. Man låter ibland T_1 ha en annan fördelning än T och säger då att man har en fördröjd förnyelseprocess.

HPP:n är det kanske mest välkända exemplet på en förnyelseprocess.

Några begrepp

1. $S_r = T_1 + \ldots + T_r$ är tidpunkten för den r:te förnyelsen.
2. $N(t) = \max\{r : S_r \leq t\}$ är antalet förnyelser i tidsintervallet $(0, t]$.
3. $W(t) = E[N(t)]$ kallas för förnyelsefunktionen.
4. $w(t) = W'(t)$ kallas för förnyelsetätheten. Notera att

$$W(t) - W(s) = \int_s^t w(t)\,dt$$

   är förväntat antal förnyelser i tidsintervallet $(s, t]$.

Fördelningen för S_r kan bestämmas rekursivt m.h.a teorin för summering av oberoende stokastiska variabler:

$$F^{(r)}(t) = P\{S_r \leq t\} = P\{S_{r-1} + T_r \leq t\}$$

S_{r-1} och T_r är ju oberoende. Laplacetransformmetoder används också.

För stora r är S_r enligt centrala gränsvärdessatsen approximativt normalfördelad. Låt $\mu = E[T]$ och $\sigma^2 = \mathrm{Var}[T]$. Då gäller att

$$\frac{S_r - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \overset{\text{ap}}{\sim} N(0, 1)$$

om r är tillräckligt stort.

Fördelningen för $N(t)$ fås ur ekvivalensen

$$N(t) \geq r \quad \Leftrightarrow \quad S_r \leq t$$

Således gäller att

$$P[N(t) \geq r] = P[S_r \leq t] = F^{(r)}(t)$$

vilket implicerar

$$P[N(t) \leq r] = 1 - F^{(r+1)}(t)$$

(detta kan även inses direkt ur ekvivalensen $N(t) \leq r \Leftrightarrow S_{r+1} > t$) och

$$P[N(t) = r] = F^{(r)}(t) - F^{(r+1)}(t)$$

Då r är stort kan man approximera högerleden med c.g.s.

Det är svårt att explicit bestämma förnyelsefunktionen

$$W(t) = E[N(t)] = \sum_{r=0}^{\infty} P(N(t) > r) = \sum_{r=1}^{\infty} P(N(t) \geq r) = \sum_{r=1}^{\infty} F^{(r)}(t)$$

Men man kan härleda en ekvation som kallas för förnyelseekvationen som ibland kan lösas. Förnyelsetätheten $w(t) = W'(t)$ satisfierar också en förnyelseekvation.

I läroboken illustrerar man ovanstående med att räkna på HPP:n, som är en av de få förnyelseprocesser som man kan räkna på explicit.

Assymptotik

Sats 7.2 (The elementary renewal theorem)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

där $\mu = E[T]$.

Sats 7.3 (Blackwell's theorem)
Om fördelningen för T är icke-lattice,

$$\lim_{t \to \infty} (W(t+h) - W(t)) = \frac{h}{\mu} \quad \textit{för} \quad h > 0$$

där $\mu = E[T]$.

Dividera båda leden i Blackwells sats med h och låt $h \to 0$. Under vissa ytterligare förutsättningar kan man kasta om gränsövergångarna och erhålla

Sats 7.5
Om fördelningen för T är icke-lattice, m.m, så

$$\lim_{t \to \infty} w(t) = \frac{1}{\mu}$$

Alternerande förnyelseprocesser

Låt U_1 vara första upptiden, D_1 vara första nertiden, U_2 vara andra upptiden, o.s.v. (Rita in tiderna i en figur över hur $X(t)$ varierar.) Då kommer cykeltiderna $T_i = U_i + D_i, i = 1, 2, \ldots$ att bilda en vanlig förnyelseprocess (förutsatt oberoende och lika fördelningar, så klart).

Vi kommer ihåg att $A(t) = P(X(t) = 1)$ är tillgängligheten vid tidpunkten t och att $A = \lim_{t\to\infty} A(t)$ är den assymptotiska (eller medel-) tillgängligheten.

Sats 7.11
Om fördelningen för $T = U + D$ är icke-lattice, är den assymptotiska tilgängligheten A lika med

$$\frac{E[U]}{E[U] + E[D]} = \frac{\mathrm{MTTF}}{\mathrm{MTTF} + \mathrm{MTTR}}$$

där $\mu = E[T]$.

Läroboken studerar nu fallen

- Exponential lifetime—Exponential repair time
- Exponential lifetime—Constant repair time

7.4 Icke-homogen Poissonprocess (NHPP)

Definition 7.7 En NHPP är en räkneprocess med oberoende och Poissonfördelade ökningar. Låt $W(t) = E[N(t)]$. Obs att nu gäller ej att $w(t) = W'(t)$ är konstant.

För $s < t$ gäller alltså att ökningen $N(t) - N(s)$ är Poissonfördelad med väntevärde $W(t) - W(s)$.

Tiden T_1 tills fel nummer 1 har överlevnadsfunktionen

$$R_1(t) = P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-W(t)} = e^{-\int_0^t w(s)\,ds}$$

Antag att tidpunkten just nu är $s \geq 0$. Låt Y_s vara tidpunkten för nästa fel. Dess överlevnadsfunktion är

$$P(Y_s > t) = P(N(s+t) - N(s) = 0) = e^{-(W(s+t)-W(s))}$$

$$= e^{-\int_s^{s+t} w(u)\,du} = e^{-\int_0^t w(s+u)\,du}$$

Felbenägenheten efter tidpunkten s är alltså $w(s + \cdot)$ (detta är en elegant beteckning för funktionen som avbildar $t \geq 0$ på $w(s + t)$).

Parametriska modeller för tätheten $w(t)$

1. Power law: $w(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$ (j.f.r Weibull-fördelningen)
2. Linear: $w(t) = \lambda(1 + \alpha t)$ (kan bli negativ, vilket är förbjudet, om $\alpha < 0$. Använd isåfall modellen bara sålänge $w(t) \geq 0$)
3. Log-linear: $\ln w(t) = \lambda(1 + \alpha t)$