Statistisk Tillförlitlighetsteori

Tentamen 2006-10-27 FACIT

1.

$$
\begin{aligned}
R(t|x) &= e^{-\int_x^{x+t} z(s)ds} = e^{-\int_0^t z(s+x)ds} \\
&\leq e^{-\int_0^t z(s)ds} = R(t)
\end{aligned}
$$

2. (a) Man kan, t. ex. rita in den femte komponenten seriellt precis efter 1 och också efter 2.

   (b) Med pivot metoden:

$$
\begin{aligned}
\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (1 - x_5)x_2x_4 + x_5((x_1 + x_2 - x_1x_2)(x_3 + x_4 - x_3x_4)) \\
&= x_2x_4 + x_5(x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 \\
&\quad -x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4)
\end{aligned}
$$

3. (a) $p_S = h(\bar{p}) = p_2^2 + p_5(p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_1^2p_2 - 2p_1p_2^2 + p_1^2p_2^2) = 0.95402.$

   (b) $I^B(5) = \frac{\partial h(\bar{p})}{p_5} = p_1^2 + 2p_1p_2 - 2p_1^2p_2 - 2p_1p_2^2 + p_1^2p_2^2 = 0.18002.$

4. (a) För att göra det möjligt att se systemet som en Markov kedja, så brukar man anta att reparationstiden är exponentiellt fördelad. Detta är ytterst sällan ett realistiskt antagande pga av exponentialfördelnings minneslöshet (reparationstider har ju, förhoppningsvis, increasing failure rate), men modellerna brukar fungera någorlunda i alla fall.

   I just detta fall behövs egentligen inte det antagandet, eftersom vi kan se systemet som en förnyelseprocess, men det är överkurs.

   (b) Låt tillstånd 0 vara ursprungstillståndet, 1 när den ena enheten är trasig, och 2 när båda är trasiga. Övergångsmatrisen för Markov kedjan blir då

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/m_r & 0 & -1/m_r \end{bmatrix}.
$$

   Denna har stationär fördelning: $[1/(m_r + 2), 1/(m_r + 2), m_r/(m_r + 2)]$. Vi vill att $m_r/(m_r + 2) \leq 0.01$ vilket betyder att $m_r \leq 198$ timmar.

5. Med Typ II censurering efter r enheter går sönder, så är: $2\lambda\mathcal{T}(T_{(r)}) \sim \chi^2(2r)$, vilket betyder att:

$$
\mathbf{P}(2\lambda\mathcal{T}(T_{(r)}) \geq \chi^2_{2r,0.01}) = 0.01
$$

   Alltså får vi att 99% säkerhet är TTT mindre än $\chi^2_{10,0.01}/4 = 23.209/4 = 5.802 \times 100$ timmar. Den beräknade åtgången är alltså högst 2901.2 liter bensin.