8 Beroende fel

8.1 Inledning

1. Common cause failures (positivt beroende; fel i en komponent $\Rightarrow$ ökad felrisk i andra komponenter)

2. Cascading failures (fel i en komponent $\Rightarrow$ fel i andra komponenter)

3. Negative dependencies (fel i en komponent $\Rightarrow$ mindre risk för fel i andra komponenter)

8.2 How to obtain reliable systems

Här finns en del praktiska riktlinjer, som...

8.3 Modeling of dependent failures

8.4 Några modeller för beroende fel

Kvadratsrotmodellen

Parallellsystem med två komponenter där båda komponenterna kan fallera p.g.a någon gemensam orsak (common cause).

Låt A_i vara händelsen att komponent i ej fungerar. Parallellsystemets otillgänglighet är

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) \geq P(A_1)P(A_2)$$

ty

$$P(A_2) \leq P(A_2|A_1)$$

(och analogt $P(A_1) \leq P(A_1|A_2)$). Detta beroende kallas <u>positivt</u>. Dessutom gäller ju alltid att

$$P(A_1 \cap A_2) \leq \min_i P(A_i)$$

Vi har således, om A_1 och A_2 är positivt beroende,

$$P(A_1)P(A_2) \leq P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) \wedge P(A_2)$$

Antag nu att vi allmänt har hittat en undre P_L och en övre P_U begränsning av ett parallellsystems otillförlitlighet:

$$P_L \leq 1 - A \leq P_U$$

då väljer man ibland något godtyckligt att sätta otillförlitligheten $1 - A$ till

$$1 - A_M = \sqrt{P_L \cdot P_U}$$

(geometriskt medelvärde) och räkna med tillförlitligheten

$$A_M = 1 - \sqrt{P_L \cdot P_U}$$

β-faktormodellen (och generaliseringar)

Antag vi har n identiska komponenter, med felbenägenhet λ. Vi ska tänka oss två typer av fel i en komponent:

- individuellt fel med felbenägenheten λ_I
- gemensammt fel med felbenägenheten λ_C

Komponentens felbenägenhet är alltså $\lambda = \lambda_I + \lambda_C$ och man introducerar β-faktorn

$$\beta = \frac{\lambda_C}{\lambda_I + \lambda_C} = \frac{\lambda_C}{\lambda}$$

och har då

$$\lambda_C = \beta\lambda$$

samt

$$\lambda_I = (1-\beta)\lambda$$

Titta nu på ett parallellsystem bestående av två komponenter (x_1, x_2) och en hypotetisk komponent (x_3) som tar hand om det gemensamma.. Notera att strukturfunktionen blir

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$$
$$= 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) = x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 - x_1x_2)x_3$$
$$= (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Idéen med den här typen av modeller är alltså att man inför ytterligare komponenter i strukturen för att modellera gemensamma fel.

Notera även att system med β-faktorer är Markovska, men att idéen att införa extra komponenter för att modellera gemensamm påfrestningar på komponenter inte är begränsad till den Markovska världen.

Man kan också tänka sig olika λ_I för olika komponenter och även olika λ_C (i olika delar av konstruktionen).

Binomial Failure Rate Model and Its Extensions

Antag vi har n identiska komponenter, alla med individuell felbenägenhet λ_I. Vidare gäller att en s.k chock inträffar med intensiteten ν. I chock-ögonblicket gäller för varje komponent att den går ner p.g.a chocken med sannolikheten p oberoende av vad som händer med de övriga komponenterna.

Detta är en generalisering av β-faktormodellen.

Även denna modell är Markovsk.

8.5 Associerade variabler

Idéen med det som följer är att begränsa tillförlitligheten $P(\phi(\mathbf{X}) = 1)$ nedåt och uppåt.

Låt de minimala vägarna vara $P_1, \ldots, P_p$ och de minimala avbrotten vara $K_1, \ldots, K_k$. Vi kommer ihåg att

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists r\, \forall i \in P_r : x_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall s\, \exists i \in K_s : x_i = 1$$

M.a.o,

$$\max_r \min_{i \in P_r} x_i = \phi(\mathbf{x}) = \min_s \max_{i \in K_s} x_i$$

Detta medför

$$\min_{i \in P_r} x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \max_{i \in K_s} x_i$$

gäller för $1 \leq r \leq p$ och $1 \leq s \leq k$. Således gäller

$$\min_{i \in P_r} X_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{X}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \max_{i \in K_s} X_i = 1$$

vilket ger att

$$P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right)$$

gäller för $1 \leq r \leq p$ och $1 \leq s \leq k$. Härur fås

$$\max_{1 \leq r \leq p} P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq s \leq k} P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right)$$

Detta allmänna resultat kan förbättras om vi begränsar oss till s.k associerade stokastiska variabler.

Definition

Definition 8.1 Variablerna $X_1, \ldots, X_n$ säges vara associerade om

$$\text{Kov}[f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)] \geq 0$$

för alla funktioner $f, g : R^n \to R$ som är icke-avtagande i varje argument.

Positivt beroende stokastiska variabler uppfyller

$$\text{Kov}[X_i, X_j] \geq 0$$

för alla $i \neq j$. Detta är en större klass.

Man kan visa att följande definition kan ersätta Definition 8.1.

Definition 8.2 Variablerna $X_1, \ldots, X_n$ säges vara associerade om

$$\text{Kov}[f(X_1, \ldots, X_n), g(X_1, \ldots, X_n)] \geq 0$$

för alla funktioner $f, g : R^n \to \{0, 1\}$ som är icke-avtagande i varje argument.

Grundläggande satser

Sats 8.1 *Varje delmängd av en klass av associerade variabler är assicierad.*

Sats 8.2 X *är assicierad.*

Sats 8.3 *Icke-avtagande funktioner av associerade variabler är associerade.*

Sats 8.4 $\mathbf{X} = X_1, \ldots, X_m$ *och* $\mathbf{Y} = Y_1, \ldots, Y_n$ *associerade, samt* $\mathbf{X}$ *och* $\mathbf{Y}$ *oberoende* $\Rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{Y} = X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ *associerade.*

Obs att ur sats 8.2 och 8.4 följer att om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, så är de även associerade.

Sats 8.8 $X_1, \ldots, X_n$ *associerade och binära* $\Rightarrow 1 - X_1, \ldots, 1 - X_n$ *associerade.*

Sats 8.9 *Om tillståndsvariablerna* $X_1, \ldots, X_n$ *hos en koherent struktur är associerade, så*

1. *för de minimala vägarna* $P_1, \ldots, P_p$ *gäller att variablerna*

$$\rho_r(\mathbf{X}) = \bigwedge_{i \in P_r} X_i \quad \textit{för} \quad r = 1, \ldots, p$$

   är associerade, och

2. *för de minimala avbrotten* $K_1, \ldots, K_k$ *gäller att variablerna*

$$\kappa_s(\mathbf{X}) = \bigvee_{i \in K_s} X_i \quad \textit{för} \quad s = 1, \ldots, k$$

   är associerade.

Bevis: Del 1 följer av att $\rho_1, \ldots, \rho_p$ är icke-avtagande. J.f.r sats 8.3. Del 2 följer med ett liknande resonemang som går via sats 8.8. $\square$

Begränsningar av tillförlitligheten

Vi börjar med det ur matematisk synpunkt viktigaste resultatet. De uppskattningar av tillförlitligheten som följer är ganska rättframma konsekvenser av sats 8.10 neden.

Sats 8.10 *Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara binära och associerade. Då*

$$P\left(\bigwedge_i X_i = 1\right) \geq \prod_i P(X_i = 1)$$

$$P\left(\bigvee_i X_i = 1\right) \leq \coprod_i P(X_i = 1)$$

där

$$\coprod_i P(X_i = 1) = 1 - \prod_i (1 - P(X_i = 1)) = 1 - \prod_i P(X_i = 0)$$

Obs att om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende, så gäller likhet ovan.

Vi har således för en seriestruktur ϕ att

$$P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \geq \prod_i P(X_i = 1)$$

Ett associerat beroende ökar alltså tillförlitligheten hos en seriestruktur jämfört med oberoendefallet.

Och om ϕ är en parallellstruktur har vi att

$$P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \coprod_i P(X_i = 1)$$

Ett associerat beroende minskar alltså tillförlitligheten hos en parallellstruktur jämfört med oberoendefallet.

Bevis av sats 8.10: Låt $Y_i = 1 - X_i$. Obs att $Y_1, \ldots, Y_n$ är associerade. Notera ekvivalensen

$$\bigwedge_i Y_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_i X_i = 0$$

Vi får nu att

$$P\left(\bigvee_i X_i = 1\right) = 1 - P\left(\bigvee_i X_i = 0\right) = 1 - P\left(\bigwedge_i Y_i = 1\right)$$

Antag nu att vi visat det första påståendet. Då följer

$$1 - P\left(\bigwedge_i Y_i = 1\right) \leq 1 - \prod_i P(Y_i = 1) = 1 - \prod_i P(X_i = 0) = \coprod_i P(X_i = 1)$$

Vi har alltså då att

$$P\left(\bigvee_i X_i = 1\right) \leq \coprod_i P(X_i = 1)$$

Således räcker det att visa den första olikheten. För att se den noterar vi först att den är ekvivalent med

$$E\left[\prod_i X_i\right] \geq \prod_i E[X_i]$$

ty vänsterledet ovan är ju lika med $E[\bigwedge_i X_i]$ och så är ju alla variablerna binära. Att $X_1, \ldots, X_n$ är associerade betyder speciellt att X_1 och $\prod_{i\geq 2} X_i$ är positivt beroende, vilket innebär att

$$E\left[\prod_i X_i\right] = E\left[X_1 \cdot \prod_{i\geq 2} X_i\right] \geq E[X_1]\, E\left[\prod_{i\geq 2} X_i\right]$$

Itererar vi detta argument, fås

$$E\left[\prod_i X_i\right] \geq \prod_i E[X_i]$$

vilket skulle visas. □

Sats 8.11 *För en koherent struktur ϕ bestående av n komponenter med associerade tillståndsvariabler $X_1, \ldots, X_n$ gäller*

$$\prod_i P(X_i = 1) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \coprod_i P(X_i = 1)$$

Bevis: Enl sats 3.2 gäller

$$\prod_i X_i \leq \phi(\mathbf{X}) \leq \coprod_i X_i$$

ur vilket

$$\prod_i X_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{X}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \coprod_i X_i = 1$$

följer. Således gäller att

$$P\left(\prod_i X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq P\left(\coprod_i X_i = 1\right)$$

Sats 8.10 ger nu att

$$\prod_i P(X_i = 1) \leq P\left(\bigwedge_i X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq P\left(\coprod_i X_i = 1\right) \leq \coprod_i P(X_i = 1)$$

vilket skulle visas. □

Satsen säger att ett koherent associerat systems tillförlitlighet ligger mellan den tillförlitlighet som fås om alla komponenterna är oberoende och serie- resp parallellkopplade, vilket är klart rimligt.

Nästa sats är en förbättring.

Sats 8.12 *För en koherent struktur ϕ bestående av n komponenter med associerade tillståndsvariabler $X_1, \dots, X_n$ gäller*

$$\prod_s P(\kappa_s(\mathbf{X}) = 1) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \coprod_r P(\rho_r(\mathbf{X}) = 1)$$

där $\kappa_s(\mathbf{X}) = \bigvee_{i \in K_s} X_i$ är parallellstrukturen hörande till det minimala avbrottet K_s och $\rho_r(\mathbf{X}) = \bigwedge_{i \in P_r} X_i$ är seriestrukturen hörande till den minimala vägen P_r.

Bevis: Vi vet från kap 3 att

$$\prod_s \kappa_s = \phi = \coprod_r \rho_r$$

Således gäller att

$$P\left(\prod_s \kappa_s = 1\right) = P(\phi = 1) = P\left(\coprod_r \rho_r = 1\right)$$

Enl sats 8.9 är avbrotts- och vägvariablerna associerade och vi får från sats 8.10 att

$$\prod_s P(\kappa_s = 1) \leq P(\phi = 1) \leq \coprod_r P(\rho_r = 1)$$

vilket skulle visas. □

Här följer det som jag tror är den bästa uppskattningen av tillförlitligheten $P(\phi = 1)$

Sats 8.13 *För en koherent struktur ϕ bestående av n komponenter med associerade tillståndsvariabler $X_1, \dots, X_n$ gäller*

$$\max_r \prod_{i \in P_r} P(X_i = 1) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \min_s \coprod_{i \in K_s} P(X_i = 1)$$

där $P_1, \dots, P_p$ och $K_1, \dots, K_k$ är de minimala vägarna resp avbrotten.

Bevis: I inledningen av detta avsnitt visades att

$$P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right)$$

gäller för $1 \leq r \leq p$ och $1 \leq s \leq k$. Enligt sats 8.10 gäller att

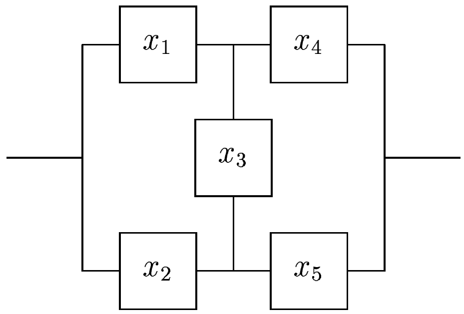
$$\prod_{i \in P_r} P(X_i = 1) \leq P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right)$$

och att

$$P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right) \leq \coprod_{i \in P_r} P(X_i = 1)$$

Härur följer satsens påstående omedelbart. □

Exempel. Betrakta brostrukturen



Antag att $P(X_i = 1) = 0.99$ för $i = 1, \dots, 5$.

De minimala vägarna är $P_1 = \{1,4\}, \quad P_2 = \{2,5\}, \quad P_3 = \{1,3,5\}, \quad P_4 = \{2,3,4\}$.

De minimala avbrotten är $K_1 = \{1,2\}, \quad K_2 = \{4,5\}, \quad K_3 = \{1,3,5\}, \quad K_4 = \{2,3,4\}$.

Om $X_1, \dots, X_5$ är associerade, så följer från sats 8.11 att

$$\underbrace{0.99^5}_{\approx 0.99} \le P(\phi = 1) \le \underbrace{1 - (1 - 0.99)^5}_{\approx 1.00}$$

och från sats 8.13 att

$$\underbrace{0.99^2}_{\approx 0.98} \le P(\phi = 1) \le \underbrace{1 - (1 - 0.99)^2}_{=0.9999}$$

Strukturfunktionen ϕ kan formuleras och förenklas m.h.a de minimala vägarna:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= x_1x_4 \vee x_2x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_2x_3x_4 \\
&= 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_3x_4) \\
&= \dots = x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \\
&\quad - x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5
\end{aligned}$$

Om man istället skriver ned den m.h.a de minimala avbrotten fås:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= (x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \\
&= [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)]\,[1 - (1 - x_4)(1 - x_5)] \\
&\quad \cdot [1 - (1 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_5)]\,[1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)] \\
&= \dots = x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \\
&\quad - x_1x_2x_3x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5
\end{aligned}$$

Om $X_1, \dots, X_5$ är oberoende, så gäller följaktligen

$$P(\phi = 1) = 2 \cdot 0.99^2 + 2 \cdot 0.99^3 - 5 \cdot 0.99^4 + 2 \cdot 0.99^5 = 0.999798$$