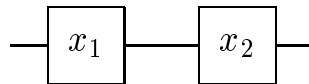


3 Qualitative System Analysis

3.10 Reliability Block Diagrams

3.10.1 Series structure

Ett seriesystem fungerar om, och endast om, samtliga komponenter fungerar.



Således gäller för den resulterande tillståndsvariabeln x att

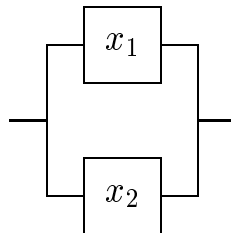
$$x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = 1$$

Notera

$$x = x_1 x_2 = \prod_i x_i = \min_i x_i$$

3.10.2 Parallel structure

Ett parallellsystem fungerar om, och endast om, minst en komponent fungerar.



Således gäller för den resulterande tillståndsvariabeln x att

$$x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 1$$

vilket även kan sägas så här:

$$x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

Härur följer

$$1 - x = (1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2$$

M.a.o

$$x = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

R&H skriver

$$x = x_1 \sqcup x_2 = \coprod_i x_i$$

Men notera även att

$$x = \max_i x_i$$

3.10.3 Reliability block diagrams vs fault trees

3.10.4 Structure function

Antag att vi har ett system med n komponenter, och låt $x_1, \dots, x_n$ vara deras resp tillståndsvariabler. För komponent i gäller då att den fungerar om $x_i = 1$ och ej om $x_i = 0$.

Låt

$$\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$$

vara systemets (eller strukturens) tillståndsvektor.

Systemets *strukturfunktion* $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, \dots, x_n)$ ska uppfylla

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om systemet fungerar} \\ 0 & \text{om systemet ej fungerar} \end{cases}$$

3.10.5 Series structure

Om alla komponenterna är kopplade i serie, så

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_i x_i = \prod_i x_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 1$$

3.10.6 Parallel structure

Om alla komponenterna är kopplade parallellt, så

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_i x_i = 1 - \prod_i (1 - x_i) = \prod_i x_i$$

ty

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$$

3.10.7 k -out-of- n structure

Ett k -utav- n -system fungerar om, och endast om, minst k av systemets n komponenter fungerar. Så

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \sum_i x_i \geq k \\ 0 & \text{om } \sum_i x_i < k \end{cases}$$

Obs att ett 1-utav- n -system är detsamma som ett parallell-system och att ett n -utav- n -system är detsamma som ett serie-system.

För ett 2-utav-3-system (se fig 3.37 och 3.38) gäller att $\phi(x_1, x_2, x_3) = 1$ om, och endast om, $x_1 = x_2 = 1$ eller $x_1 = x_3 = 1$ eller $x_2 = x_3 = 1$. Således gäller att

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 \sqcup x_1x_3 \sqcup x_2x_3 \\ &= 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

(Obs att $x_i \in \{0, 1\} \Rightarrow x_i^2 = x_i$.)

3.11 System Structure Analysis

3.11.1 Coherent structures

Ett tillförlitlighetssystem kan innehålla komponenter som varken gör till eller från för systemets funktion (men som kanske är väsentliga i något annat avseende). En sådan komponent kallas *irrelevant*.

Komponent nr 1 är irrelevant om, och endast om, $\phi(\mathbf{x})$ ej beror av x_1 . D.v.s då

$$\phi(0, x_2, \dots, x_n) = \phi(1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall x_2, \dots, x_n$$

Komponent i är irrelevant om, och endast om,

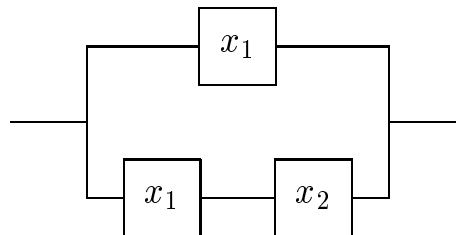
$$\phi(0_i, \mathbf{x}) = \phi(1_i, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}$$

där

$$0_i, \mathbf{x} = x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n$$

$$1_i, \mathbf{x} = x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n$$

Exemplifiera med ett parallellsystem där ena grenan består av komponent 1 och andra av komponent 1 och 2 i serie.



Strukturfunktionen blir då

$$\phi(x_1, x_2) = x_1 \sqcup x_1 x_2$$

Obs att

$$\phi(x_1, 0) = x_1 \sqcup 0 = x_1$$

och att

$$\phi(x_1, 1) = x_1 \sqcup x_1 = x_1$$

Således är komponent 2 irrelevant. Man hade också kunnat se detta genom att algebraiskt förenkla uttrycket $\phi(x_1, x_2) = x_1 \sqcup x_1x_2$:

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) &= x_1 \sqcup x_1x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_1x_2) \\ &= x_1 + x_1x_2 - x_1x_2 = x_1\end{aligned}$$

Definition 3.3 Ett system $\phi(\mathbf{x})$ sägs vara *koherent* om det ej innehåller några irrelevanta komponenter, och dess strukturfunktion är icke-avtagande i alla argument.

Systemet $\phi(\mathbf{x})$ är alltså koherent då, och endast då,

$$\forall i \exists \mathbf{x} \quad \text{such that} \quad \phi(0_i, \mathbf{x}) \neq \phi(1_i, \mathbf{x})$$

och

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{y})$$

3.11.2 General characteristics of coherent systems

Sats 3.1 För ett koherent system $\phi(\mathbf{x})$ gäller

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{0}) &= 0 \\ \phi(\mathbf{1}) &= 1\end{aligned}$$

Bevis: Antag $\phi(\mathbf{0}) = 1$. Då måste $\phi(\mathbf{1}) = 1$ (ϕ är ju icke-avtagande), så $\phi(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{1})$, vilket strider mot antagandet att systemet ej innehåller några irrelevanta komponenter. Att $\phi(\mathbf{1}) = 1$ följer analogt. QED

Sats 3.2 För ett koherent system $\phi(\mathbf{x})$ gäller

$$\prod_i x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \prod_i x_i$$

Bevis: Vänstra olikheten följer av att $\prod_i x_i = 1 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{1} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1$. Den är ju trivialt uppfylld då $\prod_i x_i = 0$. Den högra olikheten är trivial då $\prod_i x_i = 1$, så den följer ifrån $\prod_i x_i = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 0$. QED

Vi behöver kunna manipulera tillståndsvariabler. Så låt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1, \dots, x_n y_n$$

och

$$\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y} = x_1 \sqcup y_1, \dots, x_n \sqcup y_n$$

Nästa sats är viktig.

Sats 3.3 *För ett koherent system $\phi(\mathbf{x})$ gäller*

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y}) &\geq \phi(\mathbf{x}) \sqcup \phi(\mathbf{y}) \\ \phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &\leq \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Den första av dessa olikheter säger att redundans på komponentnivå är att föredra framför redundans på systemnivå. Se figurerna 3.40, 3.41 och 3.42.

Bevis: Notera först att $\mathbf{x} \leq \mathbf{x} \sqcup \mathbf{y}$. Således gäller att $\phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y})$. Analogt erhålles $\phi(\mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y})$. Dessa två olikheter medför nu att $\phi(\mathbf{x}) \sqcup \phi(\mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y})$.

Analogt gäller att $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, vilket implicerar $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x})$ och vi inser att även $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{y})$ måste vara sann. Därför gäller att $\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})$. QED

3.11.3 Structures represented by paths and cuts

Låt $C = \{1, 2, \dots, n\}$ representera mängden av komponenter.

Definition 3.4 (path sets, minimal path sets) En *väg* eller *vägmängd* är en delmängd P av komponenter sådan att systemet fungerar om samtliga komponenter i mängden fungerar. En väg är *minimal* om den ej har en strikt delmängd som också är en väg.

Definition 3.5 (cut sets, minimal cut sets) Ett *avbrott* eller *avbrotsmängd* är en delmängd K av komponenter sådan att systemet fungerar ej om inga komponenter i mängden fungerar. Ett avbrott är *minimalt* om det ej har en strikt delmängd som också är ett avbrott.

Jag skriver gärna $i_1, \dots, i_k$ för en väg eller ett avbrott istället för $\{i_1, \dots, i_k\}$.

Definitionerna säger att $i_1, \dots, i_k$ är en väg om, och endast om,

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 1 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 1$$

och ett avbrott om, och endast om,

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 0$$

Exempel 3.4

Betrakta strukturen i figur 3.40. Strukturfunktionen är

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (x_2 \sqcup x_3)$$

Etc

Exempel 3.5 Bridge structure

Se figur 3.43.

Exempel 3.6 2-out-of-3 structure

Ett 2-utav-3-system har strukturfunktionen

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \sqcup x_1x_3 \sqcup x_2x_3$$

Etc

Betrakta en allmän struktur $\phi(\mathbf{x})$ med minimala vägar $P_1, \dots, P_p$ och minimala avbrott $K_1, \dots, K_k$. Notera att

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in P_j} x_i \quad (3.12)$$

ty $\phi(\mathbf{x}) = 1$ om, och endast om, samtliga komponenter i minst en av de minimala vägarna fungerar.

Analogt gäller att

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} x_i \quad (3.12)$$

ty $\phi(\mathbf{x}) = 0$ om, och endast om, samtliga komponenter i minst en av de minimala avbrotten inte fungerar.

Titta igen på brostrukturen i exempel 3.5.

3.11.5 Pivotal decomposition

Notera att

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \phi(0_i, \mathbf{x})$$

Låt nu $j \neq i$. Då

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= x_i x_j \phi(1_i, 1_j, \mathbf{x}) + x_i (1 - x_j) \phi(1_i, 0_j, \mathbf{x}) \\ &+ (1 - x_i) x_j \phi(0_i, 1_j, \mathbf{x}) + (1 - x_i) (1 - x_j) \phi(0_i, 0_j, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Itererar man detta fås

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{y_i} (1 - x_i)^{1-y_i} \right) \phi(\mathbf{y})$$

där summationen sker över alla n -dimensionella binära vektorer $\mathbf{y}$. Obs att det är bara termerna med $\phi(\mathbf{y}) = 1$ som kommer med i summan.

Betrakta strukturen från figur 3.48,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (x_2 \sqcup x_3)$$

Vi ser att

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = 101, 110, 111$$

Således gäller

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1(1 - x_2)x_3 + x_1x_2(1 - x_3) + x_1x_2x_3$$