4 Systems of independent components

4.1 Introduction

Nu låter vi tillståndsvariablerna vara stokastiska och tidsberoende, och skriver

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{om komponent } i \text{ fungerar vid tidpunkten } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och låter i analogi med vad vi just gjort

$$\boldsymbol{X}(t) = X_1(t), \ldots, X_n(t)$$

vara den stokastiska tillståndsvektorn vid tiden $t \geq 0$.

Vi låter

$$p_i(t) = P(X_i(t) = 1) = E[X_i(t)]$$

och

$$p_S(t) = P(\phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1) = E[\phi(\boldsymbol{X}(t))]$$

vara komponent i:s resp hela systemets funktionssannolikhet.

Vi ska i detta avsnitt antaga att komponenterna fungerar oberoende av varandra, d.v.s att $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ är oberoende stokastiska variabler.

4.2 System reliability

4.2.1 Reliability of series structures

För ett seriesystem bestående av n komponenter gäller att

$$\phi(\boldsymbol{X}(t)) = X_1(t) \cdots X_n(t)$$

och

$$p_S(t) = E[X_1(t) \cdots X_n(t)] = E[X_1(t)] \cdots E[X_n(t)] = \prod_i p_i(t)$$

följer.

Antag att n komponenter med samma tillförlitlighet p är ihopsatta i en seriestruktur. Då är strukturens tillförlitlighet

$$p_S = p^n$$

Om, t.ex, $p = 0.995$ och $n = 10$, så följer att $p = 0.995^{10} \approx 0.951$. Omvänt, vill man att $p_S = 0.995$ och har $n = 10$ seriekopplade komponenter, så måste $p = 0.995^{1/10} \approx 0.9995$.

4.2.2 Reliability of parallel structures

För ett parallellsystem bestående av n komponenter gäller att

$$\phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1 - \prod_i (1 - X_i(t))$$

vilket ger

$$p_S(t) = 1 - \prod_i E[1 - X_i(t)] = 1 - \prod_i (1 - p_i(t))$$

Om alla komponenterna har samma tillförlitlighet p gäller

$$p_S = 1 - (1 - p)^n$$

Om, t.ex, $p = 0.9$ och $n = 2$, så är $p_S = 0.99$. Om istället $n = 3$, så är $p_S = 0.999$.

4.2.3 Reliability of k-out-of-n structures

Ett k-utav-n-system fungerar om, och endast om, minst k av systemets n komponenter fungerar. Så

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad \sum_i x_i \geq k \\ 0 & \text{om} \quad \sum_i x_i < k \end{cases}$$

Således gäller att

$$p_S = P(\phi(\boldsymbol{X}) = 1) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right)$$

Om alla komponenterna har samma tillförlitlighet p följer att $\sum_{i=1}^{n} X_i$ är binomialfördelad med parametrar n och p, vilket ger funktionssannolikheten

$$p_S = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

För ett 2-utav-3-system är $p_S = 3p^2(1-p) + p^3$. Då, t.ex, $p = 0.9$ är $p_S = 0.243 + 0.729 = 0.972$.

Notera specialfallen n-utav-n (seriestruktur) och 1-utav-n (parallellstruktur).

Exempel 4.3 En 2-utav-4-struktur med fyra oberoende komponenter, alla med tillförlitligheten $p = 0.97$ vid en viss icke specificerad tidpunkt. Vi får att

$$p_S = \binom{4}{2} p^2(1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3(1-p) + \binom{4}{4} p^4 \approx 0.99989$$

Obs att $1 - p_S = 0.0011 = 11/10000 \approx 1/9091$. Notera även att $1 - p = 0.03 = 3/100 \approx 1/33.3$.

4.3 Nonrepairable systems

Ett icke-reparerbart system används tills det slutar att fungera.

Nu gäller på komponentnivå

$$p_i(t) = P(T_i > t) = R_i(t) = e^{-\int_0^t z_i(u)\,du}$$

och på systemnivå

$$p_S(t) = P(T_S > t) = R_S(t) = e^{-\int_0^t z_S(u)\,du}$$

där T_i resp T_S betecknar komponent i:s resp hela systemets livslängd. Motsv felbenägenheter är $z_i(t)$ och $z_S(t)$.

4.3.1 Nonrepairable series structures

För ett seriesystem gäller

$$R_S(t) = p_S(t) = \prod_i p_i(t) = \prod_i R_i(t)$$
$$= \prod_i e^{-\int_0^t z_i(u)\,du} = e^{-\int_0^t \sum_i z_i(u)\,du}$$

Felbenägenheten för seriesystemet är alltså summan av komponenternas felbenägenheter:

$$z_S(t) = \sum_i z_i(t)$$

Exempel 4.5
Betrakta en seriestruktur bestående av n oberoende komponenter med konstant felintensitet λ_i för $i = 1, \ldots, n$. Den resulterande felintensiteten blir

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

Eftersom den ej beror av tiden, måste vi ha att T_S är exponentialfördelad med parameter λ.

I figur 4.2 har R&H plottat felintensiteten hos en seriestruktur bestående av en komponent med avtagande felintensitet, en komponent med konstant felintensitet och en komponent med växande felintensitet.

Att det tyvärr inte alltid är lätt att beräkna felintensitet för ett parallellsystem förstår vi av det som nu följer.

4.3.2 Nonrepairable parallell structures

För ett parallellsystem gäller

$$R_S(t) = 1 - \prod_i (1 - R_i(t))$$

I fallet med 2 komponenter fås

$$R_S(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t)$$

Derivering följt av teckenbyte ger oss tätheten

$$f_S(t) = -R_S'(t) = -R_1'(t) - R_2'(t) + R_1(t)R_2'(t) + R_1'(t)R_2(t)$$

och man inser att det inte går att få något slutet snyggt uttryck för felbenägenheten $z_S(t) = f_S(t)/R_S(t)$ i det här fallet.

Om båda komponenterna har konstant felintensitet, så blir

$$R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

MTTF blir för en sådan struktur,

$$\mu = \int_0^\infty R_S(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

4.5 Exact system reliability

Vi betraktar en fix tidpunkt t och ”droppar” den från notationen, så istället för t.ex $X_i(t)$ skriver vi bara X_i.

4.5.1 Computation based on the structure function

Vi har redan sett exempel på hur man beräknar p_S genom att först förenkla strukturfunktionen och sedan ta väntevärde och utnyttja att

$$E\left[\prod_{j=1}^{k} X_{i_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} E\left[X_{i_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j}$$

om alla $i_j,\ j = 1, \ldots, k$, är olika. Detta följer av att komponenterna förutsätts vara oberoende.

4.5.2 Computation based on pivotal decomposition

Vi såg i kap 3 att

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{y}} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{y_i}(1-X_i)^{1-y_i} \right) \phi(\boldsymbol{y})$$

där summationen sker över alla n-dimensionella binära vektorer $\boldsymbol{y}$. Vi får att

$$p_S = \sum_{\boldsymbol{y}} \left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1-p_i)^{1-y_i} \right) \phi(\boldsymbol{y})$$

4.5.4 The inclusion-exclusion principle

Låt K_j, $j = 1, \ldots, k$, vara de minimala avbrottsmängderna. Då gäller ju, för varje j, att

$$\underbrace{X_i = 0 \ \forall i \in K_j}_{=E_j} \quad \Rightarrow \quad \phi(\boldsymbol{X}) = 0$$

Nu gäller att

$$P(E_j) = \prod_{i \in K_j} (1-p_i) = \prod_{i \in K_j} q_i$$

Vi behöver också

$$P(E_i \cap E_j) = \prod_{i \in K_i \cap K_j} q_i$$

Etc

Från faktumet att systemet fallerar omm en av de minimala avbrottsvägarna fallerar, så har vi att

$$q_S = 1 - p_S = P\left(\bigcup_j E_j \right)$$

$$= \sum_j P(E_j) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \ldots + (-1)^{k+1} P(E_1 \cap \cdots \cap E_k)$$

Obs att detta gäller även om komponenterna ej är oberoende.

Man kan visa att

$$q_S \leq \sum_j P(E_j)$$

$$q_S \geq \sum_j P(E_j) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j)$$

$$q_S \leq \sum_j P(E_j) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<l} P(E_i \cap E_j \cap E_l)$$

etc.

4.6 Redundancy

4.6.1 Passive redundancy, perfect switching, no repairs

Se figur 4.14. Hela stand-by-systemets livstid är

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

och

$$\mathrm{MTTF}_S = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MTTF}_i$$

Svårt att bestämma fördelningen för T utifrån fördelningarna för $T_1, \ldots, T_n$. Ett undantag är gamma-fördelningen, som ju har en additionsegenskap.

4.6.2 Cold standby, imperfect switch, no repairs

Boken betraktar bara fallet då $n = 2$. Se figur 4.15. Antag att båda komponenterna har konstant felbenägenhet λ_1 resp λ_2, samt att sannolikheten att omkopplingen lyckas är $1 - p$. Systemet övelever tidpunkten $t > 0$ på ett av följande två sätt:

1. Enhet 1 fallerar ej i tidsintervallet $(0, t]$.
2. Enhet 1 fallerar i tidsintervallet $(\tau, \tau + d\tau]$ där $0 < \tau < t$, omkopplingen lyckas och enhet 2 överlever tidsintervallet $(\tau, t]$, d.v.s $t - \tau$ tidsenheter.

Vi får

$$\begin{aligned}
R_S(t) &= R_1(t) + \int_0^t (1-p) R_2(t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau \\
&= e^{-\lambda_1 t} + (1-p) \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-\tau)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}\, d\tau \\
&= e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 1)\tau}\, d\tau \\
&= e^{-\lambda_1 t} + \frac{(1-p)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{(1-p)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} \qquad (4.68)
\end{aligned}$$

om $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gäller istället

$$R_S(t) = e^{-\lambda t} + (1-p)\lambda t e^{-\lambda t} \tag{4.69}$$

MTTF för denna struktur är

$$\begin{aligned} \mu = \int_0^\infty R_S(t)\,dt &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{(1-p)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} + (1-p)\frac{1}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{4.70}$$

Resultatet gäller även då $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

4.6.3 Partly loaded redundancy, imperfect switch, no repairs

Här räknar författarna på samma system som ovan, fast med den skillnaden att enhet 2 belastas även då den är stand-by till enhet 1. Situationen blir lite mer komplicerad, men den går att räkna på så länge felbenägenheterna hos komponenterna är konstant.