

6 Dependent failures

6.1 Introduction

Exempel 6.1 (Något utökat om positivt och negativt beroende.)

Låt A_i för $i = 1, 2$ beteckna händelsen att komponent nummer i är nere. M.a.o, $A_i = \{X_i = 0\}$.

Komponenterna är oberoende omm

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ &\Leftrightarrow \\ P(A_2|A_1) &= P(A_2) \\ &\Leftrightarrow \\ P(A_1|A_2) &= P(A_1) \end{aligned}$$

Komponenterna säges vara positivt beroende omm

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &\geq P(A_1)P(A_2) \\ &\Leftrightarrow \\ P(A_2|A_1) &\geq P(A_2) \\ &\Leftrightarrow \\ P(A_1|A_2) &\geq P(A_1) \end{aligned}$$

(exempel: common cause failures, cascading failures).

Negativt beroende definieras analogt.

Visa själv:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &\geq P(A_1)P(A_2) \\ &\Leftrightarrow \\ P(A'_1 \cap A'_2) &\geq P(A'_1)P(A'_2) \end{aligned}$$

Således gäller att om A_1, A_2 är positivt beroende, så är även A'_1, A'_2 det.

En seriestruktur bestående av $n = 2$ komponenter är uppe precis då $A'_1 \cap A'_2$ inträffar. Vi får, om beroendet är positivt,

$$p_1 p_2 \leq P(A'_1 \cap A'_2) \leq \min\{p_1, p_2\}$$

ty $P(A'_1 \cap A'_2) \leq P(A_i) = p_i$ för $i = 1, 2$.

En parallellstruktur bestående av $n = 2$ komponenter är uppe precis då $A'_1 \cup A'_2$ inträffar. Vi får, om beroendet är positivt,

$$\max\{p_1, p_2\} \leq P(A'_1 \cup A'_2) \leq 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

ty $p_i = P(A_i) \leq P(A'_1 \cup A'_2) = 1 - P(A_1 \cap A_2)$ för $i = 1, 2$.

För ett system bestående av två positivt beroende komponenter gäller alltså att

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \leq p_S \leq \min(p_1, p_2) & \quad \text{om det är en seriestruktur} \\ \min(p_1, p_2) \leq p_S \leq p_1 + p_2 - p_1 p_2 & \quad \text{om det är en parallellstruktur} \end{aligned}$$

I det sista avsnittet i detta kapitel generaliseras dessa två olikheter till godtyckliga system av s.k associerade komponenter. $\square$

Se diskussionen om "common cause failures", "cascading failures" och "negative dependencies" på sidorna 208-210.

6.4 Special Models

6.4.1 The square-root method

Betrakta parallellsystemet i figur 6.3. Låt A_i för $i = 1, 2$ beteckna händelsen att komponent nummer i är nere och låt A beteckna händelsen att parallellstrukturen är nere. Då $A = A_1 \cap A_2$. Låt $q_i = 1 - p_i$ vara sannolikheten att komponent i ej fungerar.

Vi vet att om beroendet är positivt, så gäller att

$$\underbrace{q_1 q_2}_{=q_L} \leq P(A) \leq 1 - \max\{p_1, p_2\} = \underbrace{\min\{q_1, q_2\}}_{=q_U}$$

"The square-root method" tilldelar den okända sannolikheten $P(A)$ värdet

$$q_0^* = \sqrt{q_L q_U}$$

och så räknar man som om parallellstrukturen hade funktionssannolikheten $p_0^* = 1 - q_0^*$.

Om, t.ex, $q_1 = q_2 = q$, så är $q_L = q^2$ och $q_U = q$, och vi har då att

$$q_0^* = \sqrt{q^3} = q^{3/2}$$

6.4.2 The β -factor model

Antag vi har n identiska komponenter, med felbenägenhet λ . Vi ska tänka oss två typer av fel i en komponent:

- individuellt fel med felbenägenheten $\lambda^{(i)}$
- gemensamt fel med felbenägenheten $\lambda^{(c)}$

Komponentens felbenägenhet är alltså $\lambda = \lambda^{(i)} + \lambda^{(c)}$ och man introducerar β -faktorn

$$\beta = \frac{\lambda^{(c)}}{\lambda^{(i)} + \lambda^{(c)}} = \frac{\lambda^{(c)}}{\lambda}$$

och har då

$$\lambda^{(c)} = \beta\lambda$$

samt

$$\lambda^{(i)} = (1 - \beta)\lambda$$

Titta nu på ett parallellsystem bestående av två komponenter (x_1, x_2) och en hypotetisk komponent (x_3) som tar hand om det gemensamma.. Notera att strukturfunktionen blir

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_3 \sqcup x_2x_3 \\ &= 1 - (1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) = x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_1x_2)x_3 = (x_1 \sqcup x_2)x_3\end{aligned}$$

Idéen med den här typen av modeller är alltså att man inför pseudo-komponenter i strukturen för att modellera gemensamma fel.

Man kan naturligtvis ha olika $\lambda^{(i)}$ för olika komponenter och även olika $\lambda^{(c)}$ (i olika delar av konstruktionen). Vissa komponenter kan ju vara mer känsliga för externa gemensamma påfrestningar än andra.

6.5 Associated variables

Idéen med det som följer är att begränsa tillförlitligheten $P(\phi(\mathbf{X}) = 1)$ nedåt och uppåt.

Låt de minimala vägarna vara $P_1, \dots, P_p$ och de minimala avbrotten vara $K_1, \dots, K_k$. Vi vet att

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \exists r \forall i \in P_r : x_i = 1 \Leftrightarrow \forall s \exists i \in K_s : x_i = 1$$

M.a.o,

$$\max_r \min_{i \in P_r} x_i = \phi(\mathbf{x}) = \min_s \max_{i \in K_s} x_i$$

Detta medför

$$\min_{i \in P_r} x_i \leq \phi(\mathbf{x}) \leq \max_{i \in K_s} x_i$$

gäller för $1 \leq r \leq p$ och $1 \leq s \leq k$. Således gäller

$$\min_{i \in P_r} X_i = 1 \Rightarrow \phi(\mathbf{X}) = 1 \Rightarrow \max_{i \in K_s} X_i = 1$$

vilket ger att

$$P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right)$$

gäller för $1 \leq r \leq p$ och $1 \leq s \leq k$. Härur fås

$$\max_{1 \leq r \leq p} P\left(\min_{i \in P_r} X_i = 1\right) \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq s \leq k} P\left(\max_{i \in K_s} X_i = 1\right)$$

Sannolikheterna i ytterleden kan uppskattas om vi begränsar oss till s.k associerade stokastiska variabler, som i detta sammanhang inte är något annat än att generalisera begreppet positivt beroende till fler än två tillståndsviabler.

Definition 6.1 Variablerna $X_1, \dots, X_n$ säges vara associerade om

$$\text{Kov}[f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)] \geq 0$$

för alla funktioner $f, g : R^n \rightarrow R$ som är icke-avtagande i varje argument.

Obs att villkoret kan skrivas

$$Ef(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) \geq Ef(\mathbf{X})Eg(\mathbf{X})$$

och det räcker att kräva detta för $\{0, 1\}$ -värda växande funktioner f, g .

Bra att veta om associerade variabler finns i punkterna 1-5 på sida 224. Glöm inte att det är en generalisering av begreppet positivt beroende händelser.

Om tillståndsvariablerna $X_1, \dots, X_n$ är associerade säger vi att komponenterna är det.

Om komponenterna i en seriestruktur är associerade, så

$$P\left(\prod_i X_i = 1\right) \geq \prod_i P(X_i = 1) = \prod_i p_i$$

Detta generaliserar resultatet som vi hade för fallet då $n = 2$ och komponenterna positivt beroende. J.f.r det utökade exempel 6.1.

Om komponenterna i en parallellstruktur är associerade, så

$$P\left(\prod_i X_i = 1\right) \leq \prod_i P(X_i = 1) = 1 - \prod_i (1 - p_i)$$

Detta generaliserar resultatet som vi hade för fallet då $n = 2$ och komponenterna positivt beroende.

Vi har alltså att

$$P(\min_i X_i = 1) \geq \prod_i p_i$$

samt att

$$P(\max_i X_i = 1) \leq 1 - \prod_i (1 - p_i)$$

För associerade komponenter gäller följaktligen

$$\max_{1 \leq r \leq p} \prod_{i \in P_r} p_i \leq P(\phi(\mathbf{X}) = 1) \leq \min_{1 \leq s \leq k} \left(1 - \prod_{i \in K_s} (1 - p_i) \right)$$

J.f.r formel (6.19) i R&H. Obs att

$$\min_{1 \leq s \leq k} \left(1 - \prod_{i \in K_s} (1 - p_i) \right) = 1 - \max_{1 \leq s \leq k} \prod_{i \in K_s} (1 - p_i)$$

Titta själv på exempel 6.8.