

7 Counting processes

7.1 Introduction

Reparerbara system (subsystem eller komponenter) som initieras vid tidpunkten $t = 0$. Inga reparationstider. De antas försumbara. Alternativt stannas klockan medan de repareras och så studeras bara upptiderna.

”Failure times” är $S_1, S_2, \dots$. Man brukar också införa $S_0 = 0$.

”Interfailure times” är $T_1 = S_1 - S_0$, $T_2 = S_2 - S_1$, $T_3 = S_3 - S_2$, etc.

Antalet ”failures” i tidsintervallet $(0, t]$ är $N(t)$.

Vi noterar att $N(t)$ är en räkne- eller punktprocess. Sådana uppfyller

Definition 7.1 Varje räkneprocess (punktprocess på linjen) $N(t)$ uppfyller

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t)$ är heltalsvärd,
3. $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$, och
4. $N(t) - N(s)$ är, för $s < t$, antalet failures (impulser) i tidsintervallet $(s, t]$.

Obs att $t \mapsto N(t)$ är en högerkontinuerlig funktion.

7.1.2 Some basic concepts

Lista med viktiga begrepp på sidorna 236-238:

- *Independent increments*
- *Stationary increments*
- *Stationary process*
- *Non-stationary process*
- *Regular process*

- *Rate of the process*
- *Rate of occurrence of failures (ROCOF)*
- *Time between failures*
- *Forward recurrence time*

7.1.4 Fyra typer av räkneprocesser

1. Homogen Poissonprocess (HPP)
2. Förnyelseprocess (renewal process, RP)
3. Icke-homogen Poissonprocess (NHPP)
4. Imperfect repair process

7.2 Homogeneous Poisson processes (HPP)

Varje HPP har oberoende och stationära ökningar.

ROCOF (intensitetsfunktion) är

$$w(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda$$

ty $W(t) = E[N(t)] = \lambda t$.

Interfailuretiderna (tiderna mellan fel) $T_1, T_2, \dots$ är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\lambda$. Det är bara den homogena Poissonprocessen som har oberoende $\exp(\lambda)$ -tider mellan felen.

Tiden för failure nummer r ,

$$S_r = T_1 + T_2 + \dots + T_r$$

är gammafördelad med parametrar r och λ .

7.2.2 Asymptotic properties

Stora talens lag:

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\right) = 1$$

Centrala gränsvärdessatsen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

C.g.s kan användas till att konstruera konfidensintervall för λ med approximativt 95% konfidensgrad, om man skattar λ med $\hat{\lambda} = N(t)/t$:

$$\lambda = \hat{\lambda} \pm 2\sqrt{\hat{\lambda}}/\sqrt{t}$$

7.2.3 Estimate and confidence interval

Läs själv.

7.2.4 Sum and decomposition of HPPs

Summan av två oberoende HPP är en HPP.

Oberoende uttunning av en HPP är en HPP. Detta har vi pratat om på föreläsningen om kap 2.

7.2.5 Conditional Distribution of Faikure Time

Har vi redan tittat på i kap 2.

7.2.6 Compound HPPs

Sammansatt (homogen) Poissonprocess säger man kanske på svenska. Failure sker enl en HPP med intensitet λ . Till failure i hör nu en konsekvens V_i . De stokastiska variablerna $V_1, V_2, \dots$ förutsätts vara oberoende av HPP:n samt inbördes oberoende och fördelade som V . Ibland kallas de för märken och processen för en märkt HPP.

Den totala (kumulativa) konsekvensen vid tidpunkten t är

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} V_i$$

Dess väntevärde är

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) E \left[\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \middle| N(t) = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) E \left[\sum_{i=1}^n V_i \middle| N(t) = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) E \left[\sum_{i=1}^n V_i \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) n E[V] = \lambda t E[V] \end{aligned}$$

M.a.o,

$$E[Z(t)] = \lambda t E[V] = \lambda t \nu$$

där $\nu = E[V]$.

Notera att man även kan räkna ut $\tau^2 = \text{Var}[Z(t)]$ med samma metodik.

Fördelningsfunktionen för $Z(t)$ kan också beräknas med denna metodik:

$$\begin{aligned} P(Z(t) \leq z) &= P \left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \leq z \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P \left(\sum_{i=1}^{N(t)} V_i \leq z \middle| N(t) = n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P \left(\sum_{i=1}^n V_i \leq z \middle| N(t) = n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P\left(\sum_{i=1}^n V_i \leq z\right) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_V^{(n)}(z)
\end{aligned}$$

där $F_V^{(n)}(z)$ är fördelningsfunktionen för summan av n oberoende V -variabler.

Ofta gäller att $P(V \geq 0) = 1$ (t.ex om konsekvenserna av failure är ekonomiska). Då kan vi införa tiden T_c tills konsekvenserna summerar sig till minst c . Ur

$$T_c > t \Leftrightarrow Z(t) \leq c$$

fås

$$P(T_c > t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_V^{(n)}(c)$$

och, via resultatet $E[T] = \int_0^{\infty} P(T > t) dt$, får vi

$$E[T_c] = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_V^{(n)}(c)$$

Exempel 7.4

HPP med intensitet λ . Fel nr i har konsekvensen V_i , där $V_1, V_2, \dots$ är oberoende $\exp(\rho)$ -variabler. Då är summan $\sum_{i \leq n} V_i$ gammafördelad med parametrar n, ρ . Då kan man skriva upp ett explicit uttryck för $F_V^{(n)}(c)$ och räkna ut

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_V^{(n)}(c) = 1 + \rho c$$

och det följer då att

$$E[T_c] = \frac{1 + \rho c}{\lambda}$$

7.3 Renewal processes (RP)

Räkneprocessen säges vara en förnyelseprocess om interfailuretiderna $T_1, T_2, \dots$ är oberoende och likafördelade. Låt variabeln T ha denna gemensamma fördelning. Man låter ibland T_1 ha en annan fördelning än T och säger då att man har en fördröjd förnyelseprocess.

Beteckningar: $ET = \mu$, $\text{Var}[T] = \sigma^2$.

HPP:n är det kanske mest välkända exemplet på en förnyelseprocess.

7.3.1 Basic concepts

Lista på sida 248:

1. The time until the n th renewal, S_n :

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

2. The number of renewals in the time interval $[0, t]$:

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

3. The renewal function:

$$W(t) = EN(t)$$

4. The renewal density:

$$w(t) = W'(t)$$

Obs

$$E(N(t_2) - N(t_1)) = W(t_2) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt$$

för $0 \leq t_1 \leq t_2$.

7.3.2 The distribution of S_n

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

Stora talens lag:

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

Central gränsvärdessats:

$$\frac{S_n/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{\text{ap}}{\sim} N(0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad P(S_n \leq t) \approx \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

för stora n

7.3.3 The distribution of N_t

Stora talens lag:

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{då } t \rightarrow \infty$$

I resonemang om S_n , utnyttja att $N(t) \geq n$ omm $S_n \leq t$. Detta ger direkt att

$$P(N(t) \geq n) \approx \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

7.3.4 The renewal function

$$W(t) = EN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$$

där $F^{(n)}(t) = P(S_n \leq t)$

Man kan härleda en ekvation för $W(t)$, den s.k förnyelseekvationen:

$$W(t) = EN(t) = \int_0^{\infty} E[N(t) | T_1 = x] f_T(x) dx$$

där

$$E[N(t) | T_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{då } t < x \\ 1 + EN(t - x) & \text{då } t \geq x \end{cases}$$

Vi ser att

$$W(t) = \int_0^t (1 + W(t - x)) f_T(x) dx = F_T(t) + \int_0^t W(t - x) f_T(x) dx$$

Ytterleden bildar förnyelseekvationen i fallet då T har en kontinuerlig fördelning.

The elementary renewal theorem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Blackwell's theorem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (W(t + h) - W(t)) = \frac{h}{\mu} \quad \text{för } h > 0$$

7.3.5 The renewal density

$$w(t) = \frac{d}{dt} W(t)$$

Dividera båda leden i Blackwells sats med h och låt $h \rightarrow 0$. Under vissa ytterligare förutsättningar kan man kasta om gränsövergångarna i Blackwells sats och erhålla

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{1}{\mu}$$

7.3.11 Alternating renewal processes

Låt U_1 vara första upptiden, D_1 vara första nertiden, U_2 vara andra upptiden, o.s.v. Se figur 7.15. Då kommer cykeltiderna $T_i = U_i + D_i, i = 1, 2, \dots$ att bilda en vanlig förnyelseprocess (förutsatt oberoende och lika fördelningar, så klart).

Vi kommer ihåg att $A(t) = P(X(t) = 1)$ är tillgängligheten vid tidpunkten t och att $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ är den asymptotiska (eller medel-) tillgängligheten.

Man kan visa att den asymptotiska tillgängligheten A är lika med

$$\frac{E[U]}{E[U] + E[D]} = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

7.4 Nonhomogeneous Poisson processes (NHPP)

7.4.1 Introduction and definitions

En NHPP är en räkneprocess med oberoende och Poissonfördelade ökningar. Låt $W(t) = E[N(t)]$. Detta är den kumulativa intensiteten. Obs att nu antar vi ej att intensiteten $w(t) = W'(t)$ är konstant.

7.4.2 Some results

För $s, t > 0$ gäller att ökningen $N(s+t) - N(s)$ i intervallet $(s, s+t]$ är Poissonfördelad med parameter

$$W(s+t) - W(s) = \int_s^{s+t} w(u) du = \int_0^t w(s+u) du$$

Tiden T_1 tills fel nummer 1 har överlevnadsfunktionen

$$R_1(t) = P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-W(t)} = e^{-\int_0^t w(s) ds}$$

Antag att tidpunkten just nu är $s \geq 0$. Låt Y_s vara tidpunkten för nästa fel. Dess överlevnadsfunktion är

$$\begin{aligned} P(Y_s > t) &= P(N(s+t) - N(s) = 0) = e^{-(W(s+t) - W(s))} \\ &= e^{-\int_s^{s+t} w(u) du} = e^{-\int_0^t w(s+u) du} \end{aligned}$$

Felbenägenheten efter tidpunkten s är alltså $w(s + \cdot)$ (detta är en elegant beteckning för funktionen som avbildar $t \geq 0$ på $w(s+t)$).

7.4.3 The Nelson-Aalen Estimator

av funktionen $W(t)$ är en icke-parametrisk konstruktion som kommer att gås igenom på en övning.

7.4.4 Parametric NHPP models

1. Power law: $w(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$ (j.f.r Weibull-fördelningen)
2. Linear: $w(t) = \lambda(1 + \alpha t)$ (kan bli negativ, vilket är förbjudet, om $\alpha < 0$. Använd isåfall modellen bara så länge $w(t) \geq 0$)
3. Log-linear: $\ln w(t) = \lambda(1 + \alpha t)$

7.4.5 Statistical tests of trend

Man testar

$$H_0 : \text{ingen trend}$$

mot

$$H_1 : \text{monoton trend}$$

Det exakta utseendet på teststatistikan beror på om man avbryter datainsamlandet vid "failure" nr n eller vid en tidpunkten t_0 då vi har haft sammanlagt n fel.

The Laplace test

Teststatistika är

$$U = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} S_j - S_n/2}{S_n/\sqrt{12(n-1)}}$$

om processen är observerad t.o.m failure nr n , eller

$$U = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_j - t_0/2}{t_0/\sqrt{12n}}$$

om processen är observerad t.o.m tiden t_0 .

Oavsett vilket fall, gäller att U är approximativt $N(0, 1)$ -fördelad under H_0 . Notera även att $U < 0$ indikerar att processen är "happy," medan $U > 0$ tyder på att den är "sad".

Military handbook test

Teststatistikan är

$$Z = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{S_n}{S_i} \stackrel{\text{ap}}{\sim} \chi^2(2(n-1))$$

respektive

$$Z = 2 \sum_{i=1}^n \ln \frac{t_0}{S_i} \stackrel{\text{ap}}{\sim} \chi^2(2n)$$

där $S_1, S_2, \dots, S_n$ betecknar feltidpunkterna. De asymptotiska (approximativa) fördelningarna är uträknade under H_0 . I båda fallen gäller att H_0 ska förkastas för (under nollhypotesen) onormalt små eller stora värden på Z . Låga värden svarar mot system som gradvis blir sämre, medan höga värden svarar mot system som förbättras med tiden.

7.5 Imperfect repair processes

Detaljer avstår vi ifrån här.

7.6 Model selection

Se figur 7.25 (Model selection framework). Läs själv.