

8 Markov processes

8.1 Introduction

Markovkedjor används för att modellera tillförlitlighetssystem med flera tillstånd och hur övergångarna sker mellan tillstånden. Ta som ex ett 2-komponentsystem. I en fix tidpunkt $t \geq 0$ är strukturen i ett av 4 tillstånd

x			$\phi(\mathbf{x})$ om $\mathbf{x}$ är en	
	x_1	x_2	serie- struktur	parallell- struktur
3	1	1	1	1
2	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Här är x en skalär som betecknar strukturens hela tillstånd (alltså inte bara om den fungerar eller ej, som vi gjort tidigare) och x_1 resp x_2 , som vanligt, de ingående komponenternas tillstånd.

Motsv stokastiska variabler betecknas X och X_1 resp X_2 . Vill vi ha med tidsberoendet skriver vi $X(t)$ och $X_1(t)$ resp $X_2(t)$.

8.1.1 Markov property

When the present state of the process is known, the future development is independent of anything that has happened in the (strict) past.

8.2 Markov processes

Fundamentala teoretiska storheter är de s.k *transitionssannolikheter*na

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$$

definierade för alla tider $s, t \geq 0$ och för alla tillstånd i, j i *tillståndsrummet*

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, r\}$$

Vi ska anta att transitionssannolikheterna är stationära eller *tidshomogena*

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) = P_{ij}(t)$$

Så här fungerar en Markovprocess med diskret tillståndsrum eller, som man också säger, Markovkedja i kontinuerlig tid:

1. Tiden $\tilde{T}_i$ processen tillbringar i tillståndet i innan den övergår i ett annat tillstånd är exponentialfördelad med intensitet α_i .
2. När processen lämnar tillståndet i , så övergår den till tillståndet j med sannolikheten P_{ij} .

Obs att $P_{ii} = 0$ och att $\sum_j P_{ij} = \sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$.

Ett bra sätt att beskriva processens probabilistiska beteende är alltså med intensiterna $\alpha_i, i \in \mathcal{X}$ och sannolikheterna $P_{ij}, i, j \in \mathcal{X}, j \neq i$.

Vi har alltså exponentialfördelade uppehållstider. Obs att dessa är oberoende och parametern beror endast av vilket tillstånd processen är i.

Definiera, för $i \neq j$,

$$a_{ij} = \alpha_i P_{ij}$$

Detta är intensiteten för transitionen $i \rightarrow j$. Definiera även

$$a_{ii} = -\alpha_i$$

och låt

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r0} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Detta är processens *intensitetsmatrix* eller *generator*. Obs att dess radsummor är 0

$$\sum_{j=0}^r a_{ij} = \sum_{j \neq i} \alpha_i P_{ij} - \alpha_i = 0$$

Allt som är värt att veta om processen finns i matrisen $\mathbb{A}$. På diagonalen har vi intensiteten för transition ut ur de $r+1$ tillstånden, och vill vi veta

sannolikheten P_{ij} att processen övergår i j , givet att den just nu är i i , så gäller

$$P_{ij} = \frac{a_{ij}}{-a_{ii}}$$

för $j \neq i$.

Exempel 8.2 (Parallellstruktur)

En parallellstruktur med $n = 2$ komponenter med "failure rate" λ_i och "repair rate" μ_i , $i = 1, 2$. Se figur 8.2. $\square$

Exempel 8.3 (Parallellstruktur)

En parallellstruktur med $n = 2$ identiska komponenter med "failure rate" λ och "repair rate" μ . Se figur 8.3. $\square$

Exempel (Seriestruktur)

En seriestruktur med $n = 2$ identiska komponenter med "failure rate" λ och "repair rate" μ . $\square$

8.2.2 State equations

Antag att $X(0) = i$, skriv $P_j(t)$ istället för $P_{ij}(t)$ och definiera radvektorer

$$\mathbf{P}(t) = (P_0(t) \ P_1(t) \ \cdots \ P_r(t))$$

och dess tidsderivata

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = (\dot{P}_0(t) \ \dot{P}_1(t) \ \cdots \ \dot{P}_r(t))$$

Man kan visa att

$$\mathbf{P}(t) \mathbb{A} = \dot{\mathbf{P}}(t) \tag{8.19}$$

Detta är ett system av differentialekvationer, som benämnes *tillståndsekvationerna*. Lösningen (se avsnitt 8.9) kan skrivas

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) e^{t\mathbb{A}}$$

där

$$e^{t\mathbb{A}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{t\mathbb{A}}{k} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k$$

($\mathbb{I} = \mathbb{A}^0$ är identitetsmatrisen). J.f.r med lösningen av den vanliga differentialekvationen $\dot{y}(t) = ky(t)$ med startvillkoret $y(0)$.

Egentligen gäller i uttrycket ovan för $\mathbf{P}(t)$ att $\mathbf{P}(0)$ är radvektorn bestående av bara 0:or förutom en 1:a i position i . Vi antog ju att $X(0) = i$. Men det går att visa att det gäller även för godtyckliga initialfördelningar

$$\mathbf{P}(0) = (P_0(0) \ P_1(0) \ \cdots \ P_r(0))$$

Exempel 8.5

Betrakta en enskild komponent med felintensitet λ och reparationsintensitet μ . Se figur 8.5. Obs att

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

R&H skriver ned ekvationssystemet

$$\mathbf{P}(t)\mathbb{A} = \dot{\mathbf{P}}(t)$$

explicit och anger lösningen under förutsättning att systemet initialt fungerar. Se formlerna (8.21) och (8.22).

Notera att, då $t \rightarrow \infty$, så

$$P_1(t) \rightarrow \frac{\mu}{\lambda + \mu} = P_1$$

$$P_0(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = P_0$$

Notera också att komponentens (asymptotiska) tillgänglighet A är

$$A = P_1 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

Man kan visa att de asymptotiska sannolikheterna P_1, P_0 ej beror av processens initialtillstånd. $\square$

8.3 Asymptotic solution

Vi ska bara studera s.k irreducerbara Markovprocesser. För sådana gäller då $t \rightarrow \infty$, att V.L i tillståndsekvationerna (8.19) konvergerar emot

$$\mathbf{P}\mathbb{A}$$

där $\mathbf{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t)$ är den s.k. *stationära fördelningen*, och att högra ledet konvergerar mot $(0 \ 0 \ \dots \ 0) = \mathbf{0}$. Således gäller att

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Detta ekvationssystem används till att beräkna de stationära eller asymptotiska sannolikheterna $\mathbf{P} = (P_0 \ P_1 \ \dots \ P_r)$.

8.3.1 System performance characteristics

Visit frequency. Frekvensen transitioner ifrån tillstånd k in i j är $P_k a_{kj}$. Så tillstånd j 's besöksfrekvens är

$$\nu_j = \sum_{k \neq j} P_k a_{kj} = P_j \alpha_j$$

Snitttiden mellan två besök i j är $1/\nu_j$.

Mean duration of a visit. Förväntad uppehållstid i tillstånd j är

$$\theta_j = 1/\alpha_j$$

Notera att

$$P_j = \nu_j \theta_j$$

System availability. Låt B beteckna de tillstånd som svarar mot ett fungerande system och låt $F = \mathcal{X} \setminus B$. Systemets ("long-term") tillgänglighet är

$$A_S = \sum_{j \in B} P_j$$

Frequency of system failures. Detta är frekvensen transitioner ifrån ett tillstånd i B till ett tillstånd i F . D.v.s

$$\omega_F = \sum_{j \in B} \sum_{k \in F} P_j a_{jk}$$

Mean duration of a system failure. Betecknas θ_F och fås ur

$$1 - A_s = \omega_F \theta_F$$

Mean time between system failures.

$$\text{MTBF}_S = \frac{1}{\omega_F}$$

Mean functioning time until system failure. Betecknas $E(U)_S$ och uppfyller, självklart,

$$\text{MTBF}_S = E(U)_S + \theta_F$$

8.4 Parallel and series structures**8.4.1 Parallel structures of independent components****8.4.2 Series structures of independent components****8.4.3 Series structures of components where failure of one component prevents failure of the other**

Tabell 8.2 i boken känns inte rätt. Så här ska det vara:

State	Component 1	Component 2
2	Functioning	Functioning
1	Failed	Taken out of operation
0	Taken out of operation	Failed

Detta överensstämmer med figur 8.9. Här är

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\mu_2 & 0 & \mu_2 \\ 0 & -\mu_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

R&H löser $\mathbf{P}\mathbb{A} = \mathbf{0}$ och får

$$P_0 = \frac{\lambda_2/\mu_2}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$$

$$P_2 = \frac{1}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$$

Vi ser att (den asymptotiska) tillgängligheten är

$$A_S = P_2$$

att systemet går ner med frekvensen

$$\begin{aligned}\omega_F = \nu_2 &= P_2(\lambda_1 + \lambda_2) = A_S(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}\end{aligned}$$

och att systemet i snitt är nere

$$\begin{aligned}\theta_F &= \frac{1 - A_S}{\omega_F} = \frac{1 - A_S}{A_S} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \text{MRT}_1 \cdot P(C_1 | F_S) + \text{MRT}_2 \cdot P(C_2 | F_S)\end{aligned}$$

där vi skrivit $C_i | F_S$ istället för det längre "Component i fails | System failure" och MRT betyder "Mean Repair Time".

Notera också att

$$\text{MTBF}_S = \text{MTTF}_S + \theta_F = \dots = \frac{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

eftersom

$$\text{MTTF}_S = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Notera till sist att

$$\text{MTBF}_S = \frac{1}{\omega_F}$$

R&H generaliserar nu detta till fallet med n komponenter.

8.5 Mean time to first system failure

Diskutera kring figur 8.10, som illustrerar ett parallellsystem med två identiska reparerbara komponenter.

8.6 Systems with dependent components

Diskutera kring figur 8.11, som illustrerar ett parallellsystem med två identiska reparerbara komponenter som är utsatta för gemensamma påkänningar ("common cause failure").

8.7 Standby systems

Här finns flera intressanta exempel. T.ex figur 8.15.