Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Matematisk statistik

TMS026/MSN310 Statistisk tillförlitlighetsteori, 5 p

Tentamen 19 oktober 2004 f V

Obs att skrivningstiden är 5 timmar.

Tillåtna hjälpmedel är räknedosa utan information om kursen i minnena, Beta, Tommy Norbergs formelsamling samt ett eget handskrivet A4-ark med anteckningar från kursen. De som inte har tillgång till Beta får lov att ta med sig några utdelade formelblad kopierade ur Beta.

Jour är Oskar Sandberg, ankn 5366. Oskar kommer till skrivningssalen efter kl 9^{30} och ev 12^{00}. Examinator är Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 794209.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a (Chalmers) eller 21 för VG (GU). Lösningar går att ladda ner från kurshemsidan. Rättningsprotokoll anslås i första våningen i Matematisk centrum, Eklandagatan 86. Granskning av tentan kan göras under terminstid i mottagningsrummet på entréplanet (våning 2) i Matematisk centrum må-fr 12^{30}–13 eller efter överenskommelse med Oskar eller Tommy.

Svar skall motiveras om ej annat sägs i uppgiften.

Uppgifter

1. En struktur består av två oberoende komponenter med $\exp(\lambda_i)$-fördelade livstider T_i, $i = 1, 2$. Visa att
$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad (5\text{ p})$$

2. Härled strukturfunktionen för ett 3-utav-4-system. Antag att alla komponenterna har samma tillförlitlighet p och att de fungerar oberoende av varandra. Bestäm systemets tillförlitlighet. (5 p)

3. Antag att ett tillförlitlighetssystem består av två positivt beroende komponenter 1 och 2.
   (a) Ange ett villkor på tillståndsvariablerna X_1 och X_2 som garanterar att deras inbördes beroende är positivt. (1 p)

   Låt X_S vara systemets tillståndsvariabel.

   (b) Antag att systemet är en seriestruktur. Visa att
   $$P(X_S = 1) \geq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \qquad (2\text{ p})$$
   (c) Antag att systemet är en parallellstruktur. Visa att
   $$P(X_S = 1) \leq 1 - P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \qquad (2\text{ p})$$

4. Oplanerade stopp i en viss produktionsanläggning kan antas följa en homogen Poissonprocess med intensitet λ stopp/år. Under de två första driftsåren fick man totalt 7 oplanerade stopp. Punkt- och intervallskatta λ. Konfidensgrad bör vara 0.95. (5 p)

5. I denna uppgift ska du modellera en seriestruktur bestående av två komponenter, sådan att då den ena komponenten är nere vilar den andra. Antag att båda komponenterna har konstant felbenägenhet λ_1 resp λ_2 samt att deras resp reparationstider är exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_i$, $i = 1, 2$. Antag att komponenterna är oberoende samt att deras upp- resp nertider är oberoende av varandra. Låt $p_S(t)$ vara sannolikheten att systemet är uppe (d.v.s fungerar) t tidsenheter efter igångsättning.

   (a) Visa att $\lim_{t \to \infty} p_S(t) = \dfrac{1}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$ (3 p)

   (b) Med vilken frekvens går systemet i snitt ner? (1 p)

   (c) Hur länge är systemet i snitt nere? (1 p)

6. Man utsatte $n = 10$ halvledarkomponenter för ett funktionstest. Då $r = 5$ komponenter hade upphört att fungera avbröts testet och man räknade ut (a) trolighetsskattningen av felbenägenheten λ, som antas vara konstant, (b) dess väntevärdesriktiga modifiering och (c) ett uppåt begränsat konfidensintervall för λ med konfidensgraden 0.95. De 5 funktionstiderna som uppmättes var

   $$66.7, \quad 86.8, \quad 112.4, \quad 890.9, \quad 902.1$$

   Enhet: timmar. Vad fick man för resultat i (a), (b) och (c)? (5 p)

Lycka till!

1. $$P(T_1 < T_2) = \int_0^\infty P(T_1 < T_2 \,|\, T_1 = t)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \int_0^\infty P(T_2 > t \,|\, T_1 = t)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt$$
$$= \int_0^\infty P(T_2 > t)\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t}\, \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2. En direkt uträkning ger
$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 \sqcup x_1x_2x_4 \sqcup x_1x_3x_4 \sqcup x_2x_3x_4$$
$$= 1-(1-x_1x_2x_3)(1-x_1x_2x_4)(1-x_1x_3x_4)(1-x_2x_3x_4)$$
Med pivotuppdelning fås istället att
$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3(1-x_4) + x_1x_2(1-x_3)x_4 + x_1(1-x_2)x_3x_4 + (1-x_1)x_2x_3x_4$$
ty de fem fungerande tillstånden är $1111, 1110, 1101, 1011, 0111$. Oavsett vilken metod som används, så ska man efter förenkling få
$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - 3x_1x_2x_3x_4$$
Systemets tillförlitlighet blir p.g.a oberoendet
$$P(\phi = 1) = E[\phi] = 4p^3 - 3p^4$$
ty, t.ex gäller $E[X_1X_2X_3] = E[X_1]E[X_2]E[X_3] = p^3$. Ett alternativt sätt att se detta är m.h.a binomialfördelningen, ty antalet fungerande komponenter är $\mathrm{bin}(4,p)$ och systemet är uppe omm minst tre komponenter är uppe. Således är
$$P(\phi = 1) = \binom{4}{3}p^3(1-p) + \binom{4}{4}p^4(1-p)^0 = 4p^3(1-p) + p^4 = 4p^3 - 3p^4$$

3. (a) Villkoret kan formuleras $E[X_1X_2] \geq E[X_1]E[X_2]$, vilket är en direkt översättning av $P(A_1^c \cap A_2^c) \geq P(A_1^c)P(A_2^c)$ om man låter $A_i = \{X_i = 0\}$ för $i = 1,2$ och noterar att
$$P(A_1^c \cap A_2^c) \geq P(A_1^c)P(A_2^c) \quad \Leftrightarrow \quad P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1)P(A_2)$$
(b) För en seriestruktur gäller att $X_S = X_1X_2$. Vi får
$$P(X_S = 1) = E[X_1X_2] \geq E[X_1]E[X_2] = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$$
(c) För en parallellstruktur gäller att $X_S = X_1 \sqcup X_2 = 1-(1-X_1)(1-X_2)$. Vi får
$$P(X_S = 0) = E[1-X_S] = E[(1-X_1)(1-X_2)] = 1 - E[X_1] - E[X_2] + E[X_1X_2]$$
$$\geq 1 - E[X_1] - E[X_2] + E[X_1]E[X_2]$$
$$= (1-E[X_1])(1-E[X_2]) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$
vilket visar att $P(X_S = 1) \leq 1 - P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$.

4. Vi har att $N(2) = 7$. Så $\widehat{\lambda} = 7/2 = 3.5$ stopp/år är en väntevärdesriktig skattning av intensiteten λ. Enl R&H, sida 243, är
$$\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}{2t}, \frac{\chi^2_{\alpha/2,2(n+1)}}{2t}\right)$$
ett $(1-\alpha)$-konfidensintervall för λ (här tänker man sig att $N(t) = n$). I någon χ^2-tabell (t.ex den i formelsamlingen) ser vi att $\chi^2_{1-\alpha/2,2n} = \chi^2_{0.975,14} = 5.62873$ och $\chi^2_{\alpha/2,2(n+1)} = \chi^2_{0.025,16} = 28.8454$. Det sökta 95%-intervallet blir därför (1.41, 7.21). Den som ur $N(t) \overset{\text{ap}}{\sim} \mathrm{N}(\lambda t, \sqrt{\lambda t})$ härleder konfidensintervallet $\lambda = \widehat{\lambda} \pm 2\sqrt{\widehat{\lambda}/t}$ (och svarar med $\widehat{\lambda} = 3.5 \pm 2.65$) (eller gör något lite subtilare i stil med R & H, sida 503) får räkna med poängavdrag eftersom vi har för få observationer för att approximation enl c.g.s ska fungera väl.

5. Vi ska modellera seristrukturen med en lämplig Markovprocess. Tillståndsrum är $\mathcal{X} = \{3, 2, 1\}$ eller $\{11, 10, 01\}$. Följande övergångar har intensiteter > 0 (d.v.s är möjliga):

$$\begin{array}{llll} \text{transitionen} & 3 \equiv 11 \to 10 \equiv 2 & \text{sker med intensiteten} & \lambda_2 \\ & 3 \equiv 11 \to 01 \equiv 1 & & \lambda_1 \\ & 2 \equiv 10 \to 11 \equiv 3 & & \mu_2 \\ & 1 \equiv 01 \to 11 \equiv 3 & & \mu_1 \end{array}$$

Det är bara då systemet är i tillståndet 3 som det är i funktion. Sålunda har processen intensitetsmatrisen (generatorn)

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ 0 & -\mu_2 & \mu_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

och genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ser vi (a) att

$$\lim_{t \to \infty} p_S(t) = P_3 = \frac{1}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$$

(b) I snitt går systemet ner med frekvensen $\omega_F = P_3(\lambda_1 + \lambda_2)$, ty intensiteten för transition ut ur det enda fungerande tillståndet 3 är $\lambda_1 + \lambda_2$. Vi får

$$\omega_F = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}$$

(c) I snitt är systemet nere

$$\theta_F = \frac{1 - P_3}{\omega_F} = \frac{1 - P_3}{P_3} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

6. Total tid i test för de 10 komponenterna är

$$\mathcal{T}_5 = 66.7 + 86.8 + 112.4 + 890.9 + 902.1 + 5 * 902.1 = 6569.4 \quad \text{timmar}$$

(a) Trolighetsskattningen är

$$\widehat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \frac{r}{\mathcal{T}_r} = \frac{5}{6569.4} = 7.6110 \cdot 10^{-4} \approx 7.61 \cdot 10^{-4} \quad \text{fel/timma}$$

(b) Den väntevärdesriktiga justerade trolighetsskattningen är

$$\widehat{\lambda} = \frac{r - 1}{\mathcal{T}_r} = \frac{4}{6569.4} = 6.0888 \cdot 10^{-4} \approx 6.09 \cdot 10^{-4} \quad \text{fel/timma}$$

(c) Ett uppåt begr konfidensintervallet med konfidens 0.95 är

$$\lambda \leq \frac{\chi^2_{2r,\alpha}}{2\mathcal{T}_r} = \frac{18.307}{2 \cdot 6569.4} = 13.93354 \cdot 10^{-4} \approx 13.93 \cdot 10^{-4} \quad \text{fel/timma}$$

ty $2\lambda\mathcal{T}_r \sim \chi^2(2r)$ och $\chi^2_{2r,\alpha} = \chi^2_{10,0.05} = 18.307$.