Med reservation för tryck- och räknefel![1]

Kapitel 2

1. (a) Tillståndsrum är $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ och transitionsmatris är

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0 & 0.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0.48 & 0 & 0.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0.48 & 0 & 0.52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) $\Pr[X_2 = 4|X_0 = 2] = P^2(2,4) = 0.52^2 = 0.2704$

   (c) $\Pr[X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 = 4|X_0 = 2] = 0$ eller $\Pr[X_3 = 4|X_0 = 2] = P^3(2,4) = 0.2704$ beroende på hur uppgiften tolkas (jag vill inte säga att det ena svaret är rättare än det andra)

   (d) $\Pr[X_2 = 4|X_0 = 2] + \Pr[X_2 = 0|X_0 = 2] == 0.52^2 + 0.48^2 = 0.5008$

   (e) Låt $f(x) = 4 - x$ för $x \in E$. Då $E[4 - X_2|X_0 = 2] = E[f(X_2)|X_0 = 2] = \mathbf{P}^2\mathbf{f}(2) = 1.92$

   (f) $F(2,4) = 0.540$

   (g) $R(2,1) + R(2,2) + R(2,3) = 0.958 + 1.997 + 1.038 = 3.994$

2. Koda tillstånden L, M, H, F, så att $E = \{L, M, H, F\}$

   (a) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0.85 & 0.09 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\Pr\{X_3 = F|X_0 = L\} = P^3(L,F) =?$

   (c) Inför $T^F = \min\{n \geq 1 : X_n = F\}$ och $T^L = \min\{n \geq 1 : X_n = L\}$. Sökt är $\Pr\{T^F \leq 3|X_0 = L\} =?$

   (d) $E[T^H|X_0 = L] = E[T^L|X_0 = L] - 1 = 1/\pi_L - 1 =?$

   (e) $1 - \pi_F =?$

   (f) Inför $f(L) = 1000,\ f(M) = 500,\ f(H) = 400,\ f(F) = -700$. Sökt är $E[f(X_n)|X_0 = L] = \mathbf{P}^n\mathbf{f}(L) \to \pi\mathbf{f} =?$

   (g) Definiera om f enl $f(L) = 1000,\ f(M) = 500,\ f(H) = -600,\ f(F) = -700$ och transitionsmatrisen $\mathbf{P}$ enl

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0.85 & 0.09 & 0.06 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Sökt är

3. (a) Tillståndsrum är $E = \{G, S, I, H, D\}$ och transitionsmatris är

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.15 & 0 & 0.55 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.3 & 0.55 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[1] Jag är tacksam om den som upptäcker felaktigheter i svaren rapporterar detta till föreläsaren eller någon av övningsledarna. De, och kommande generationer Z-teknologer, är också tacksamma för hjälp med att räta ut en del frågetecken bland svaren

(b) $F(I, H) = 0.630$

(c) $R(I, I) = 2.676$

(d) $R(G, G) + R(G, S) + R(G, I) = 1.620 + 0.634 + 0.141 = 2.394$

(e) Ankomstfördelning är $\mu = [0.6 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0]$, så svaret borde vara $100\mu(I) = 10$.

6. (a) Tillståndsrummet är $E = \{T, F, I, S, N, G\}$ (N står för "Scrap" och G för "Good") och transitionsmatris är

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $100F(T, N) = 36.8$

(c) $nF(T, G) = 100 \;\Rightarrow\; n = 159$ (runda av uppåt)

(d) $n = 171$

(e) Varje processat kort kostar i USD,

$$8 + 10R(T, T) + 15R(T, F) + 25R(T, I) + 20R(T, S) - 2F(T, N) = 87.53$$

Under 47 veckor processas $47 \cdot 5\,000 = 235\,000$ kort. Overheadkostnaden utslagen per kort blir därför $10^6/235\,000 = 4.26$. Totala kostnaden per processat kort blir i snitt $87.53 + 4.26 = 91.79$ och per tillverkat kort ungefär $91.79/F(T, G) = 145.23$, ty $F(T, G) = 0.632$ och vill man att vinsten ska vara 25% blir priset för ett kort $1.25 \cdot 145.23 = 181.54$. Man kan mycket väl tänka sig ett annat antal arbetsveckor per år. I så fall kommer overheadkostnaden att slås ut över ett annat antal kort och priset blir ett annat.

7. (a) Tillståndsrummet är $E = \{B, S, C, O\}$ och skattningen av transitionsmatrisen är

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.05 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(b) $57\pi(C) = 15.94$ miljarder USD

(c) Fördelningen i juni är ungefär $\mu = [19.6 \quad 11.7 \quad 13.4 \quad 12.3]/57$, så fördelningen två månad senare måste vara ungefär $\mu\mathbf{P}^2$ och i bankerna borde det då finnas ungefär $57\mu\mathbf{P}^2(B) = 18.68$ miljarder USD.

8. (a) Kedjan ska modellera kundbeteendet, så tillstånden är s: "super soap", c: "cheap soap" och e: "extra clean soap" $\Rightarrow E = \{s, c, e\}$ och transitionsmatrisen är ungefär

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Initialfördelning är $\mu = [0.5 \quad 0.5 \quad 0]$.

(b) $\pi(e) = 0.222$

(c) $\Pr_\mu\{X_2 = e\} = (\mu\mathbf{P}^2)(e) = 0.243$

(d) 3

(e) ?

10. (a) $P(b,a) = 1.0$
    (b) $P(b,a) = 1.0$
    (c) $P^2(a,a) = 0.49$
    (d) $\pi(a) = 0.370$

11. Låt $\mathbf{f} = [10 \quad 20 \quad 30]^T$ och låt $\mu = [0.1 \quad 0.3 \quad 0.6]$.
    (a) $P(c,b) = 0.1$
    (b) $P^2(c,b) = 0.39$
    (c) $P^2(c,b) = 0.39$
    (d) $(\mu\mathbf{P}^2)(b) = 0.417$
    (e) $P(c,b)P(b,c) = 0.04$
    (f) $\mathbf{Pf}(c) = 21.0$
    (g) $\pi(a) = 0.203$
    (h) $\pi(b) = 0.443$
    (i) $\pi\mathbf{f} = 21.52$

12. Låt $\mathbf{f} = [20 \quad 5 \quad 15 \quad -10]^T$ vara kolumnvektorn som svarar mot profitfunktionen f och låt $\mathbf{g} = [400 \quad 25 \quad 225 \quad 100]^T$ vara kolumnvektorn som svarar mot funktionen $g(x) = f(x)^2$. Låt dessutom $\mu = [0.2\ 0.4\ 0.3\ 0.1]$.
    (a) $(\mathbf{Pf})(d) = 5.0$
    (b) $(\mathbf{Pf})(b) = 5.5$
    (c) $(\mathbf{Pg})(b) = 147.5$
    (d) $(\mathbf{Pg})(b) - ((\mathbf{Pf})(b))^2 = 117.25$
    (e) $(\mu\mathbf{Pg})(b) - ((\mu\mathbf{Pf})(b))^2 = 128.11$

13. (b) Enda transienta tillståndet är e
    (c) Irreducibla mängder är $E_1 = \{a,c,d\}$, $E_2 = \{b\}$.
    (d) "First passage"-sannolikheterna är

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0.67 & 0.33 & 0.67 & 0.67 & 0.40 \end{bmatrix}$$

    (e) "Number of returns"-väntevärdena är

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1.67 \end{bmatrix}$$

    (f) Asymptotiskt är transitionsmatrisen lika med

$$\lim_n \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 10/31 & 0 & 7/31 & 14/31 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10/31 & 0 & 7/31 & 14/31 & 0 \\ 10/31 & 0 & 7/31 & 14/31 & 0 \\ 20/93 & 1/3 & 14/93 & 28/93 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.323 & 0 & 0.226 & 0.452 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.323 & 0 & 0.226 & 0.452 & 0 \\ 0.323 & 0 & 0.226 & 0.452 & 0 \\ 0.215 & 0.333 & 0.151 & 0.301 & 0 \end{bmatrix}$$

15. (a) $5/12 = 0.417$
    (b) $5/12 = 0.417$
    (c) 0
    (d) $5/24 = 0.208$

Kapitel 3

1. Teoretisk medelförsäljning från de 50% hushållen han kommer in i, är $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{3} \cdot 100 = 63\frac{1}{3}$. Man kan simulera observationer från denna fördelning med tärningskast om man avbildar $x = 1$ på 0, $x = 2, 3, 4$ på 60 och $x = 5, 6$ på 100. Att simulera huruvida försäljaren kommer in i ett hushåll eller ej kan göras med slantsingling.

2. Den bästa strategin är att byta. Om man ej byter är sannolikheten att gissa rätt 1/3. Om man byter är den 2/3.

3. (a) $1, 3, 3$ om slumptalet x avbildas på heltalsdelen av $4x + 3$.
   (b) $1, 4, 3$ om slumptalet x avbildas på 1 då $x \le 0.3$, på 2 då $0.3 < x \le 0.5$, på 3 då $0.5 < x \le 0.6$ och på 4 då $0.6 < x$.

10. (a) Om slumptalet x avbildas på $y = -4 \ln x$ fås $y = 5.879, 1.204, 2.248, 10.637$.
    (b) Fördelningsfunktion för Weibull med skalparameter λ och formparameter α är $F(x) = 1 - \exp(\lambda x)^\alpha$ för $x \ge 0$. Inversen är $F^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda}(-\ln(1-y))^{1/\alpha}$ och vi kan byta $1 - y$ mot y eftersom $1 - Y \sim \mathrm{U}(0, 1)$ om $Y \sim \mathrm{U}(0, 1)$. I uppgiften är parametrarna $\lambda = 0.25$ och $\alpha = 2.5$ och vi ska därför avbilda slumptalet y på $4(-\ln y)^{5/2}$ för att få en observation på en Weibullfördelning med de givna parametrarna. Jag erhöll $2.031, 1.077, 1.383, 2.575$. Den som avbildar y på $4(-\ln(1-y))^{5/2}$ och får $1.018, 1.961, 1.627, 0.610$ gör naturligtvis också rätt.
    (c) Med Box-Mullers metod fås

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2\ln y_1}\cos 2\pi y_2 = -0.108 \\ x_2 &= \sqrt{-2\ln y_1}\sin 2\pi y_2 = -1.711 \\ x_3 &= \sqrt{-2\ln y_3}\cos 2\pi y_4 = 0.959 \\ x_4 &= \sqrt{-2\ln y_3}\sin 2\pi y_4 = 0.451 \end{aligned}$$

    Detta är 4 observationer på $\mathrm{N}(0, 1)$. Observationer från $\mathrm{N}(4, 2)$ får vi genom att avbilda dessa med $x \mapsto 2x + 4$. Jag erhöll $3.784, 0.578, 5.919, 4.903$.

11. Låt X ha fördelningen given av att $P[X = 0] = 0.5$, $P[X = 100] = 0.3$ och $P[X = 200] = 0.2$ och låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende och fördelade som X. Notera att $E[X] = 70$.
    (a) Låt $N \sim \mathrm{Poi}(50/4)$ representera antalet samtal under tiden från 12^{00} till 12^{15} någon dag. Vi ska tänka oss att de successiva försäljningsintäkterna är $X_1, X_2, \dots$. Dessa och N ska naturligtvis vara oberoende. Försäljningsintäkten från perioden är $Y = \sum_{k=0}^{N} X_k$ (obs. att summan är 0 om den skulle råka bestå av 0 termer, vilket den gör precis då $N = 0$). $E[Y]$ kan räknas ut så här:

$$\begin{aligned} E[Y] = E\left[\sum_{k=0}^{N} X_k\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{k=0}^{N} X_k \,|N = n\right] P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{k=0}^{n} X_k\right] P[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, E[X]\, P[N = n] \\ &= E[X]\, E[N] = 70 \cdot \frac{50}{4} = 875 \end{aligned}$$

    Kolla gärna detta mot resultatet av din simulering.

(d) Om tiderna mellan samtal istället är typ-3 Erlang, så betyder det att tiderna mellan samtal nu är summan av 3 oberoende Exp-variabler. Då kan vi tänka oss att $3 \cdot 50 = 150$ samtal kommer i snitt per timma, men att bara 1/3 av dessa når fram till en operatör. Då skulle den teoretiska försäljningen $E[Y]$ räknas ut som ovan dock med den skillnaden att 70 byts mot 70/3 och 50/4 mot 150/4. Resultatet blir alltså detsamma. Kolla detta mot resultatet av din simulering.

12. Använd att $5X + 3 \sim \mathrm{U}(3, 8)$ om $X \sim \mathrm{U}(0, 1)$.

13. Weibull med skalparameter λ och formparameter α har väntevärdet

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\Gamma(1 + 1/\alpha)$$

och variansen

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma(1 + 1/\alpha)^2\right\}$$

I appendix 3.1 finns beskrivet hur man kan beräkna $\Gamma(1+x)$ då $0 \le x \le 1$ och hur man kan reducera $\Gamma(n + x)$ till detta fallet. Fast förmodligen finns redan en rutin för beräkning av Gammafunktionen i ditt programspråk. I svaret till övn 3.10(b) (se ovan) lär vi oss att observationer från denna Weibullfördelning fås från observationer x på $\mathrm{U}(0, 1)$ medelst transformationen $x \mapsto \frac{1}{\lambda}(-\ln x)^{1/\alpha}$.

En något enklare variant av denna övning är att bestämma sig för något lämpligt värde på parameterparet (λ, α), generera observationer från en $\mathrm{Wei}(\lambda, \alpha)$ enl ovan och jämföra erhållet medelvärde med μ och erhållen varians med σ^2.

Kapitel 4

1. $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -10 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & -12 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & -14 \end{bmatrix}$

2. (a) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/20 & 1/10 & 7/20 \\ 0 & -1/5 & 2/25 & 3/25 \\ 8/5 & 1/5 & -2 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.05 & 0.1 & 0.35 \\ 0. & -0.2 & 0.08 & 0.12 \\ 1.6 & 0.2 & -2. & 0.2 \\ 1. & 0. & 0. & -1. \end{bmatrix}$

   (b) $40/71 = 0.563$

   (c) $3175/142 = 22.36$

4. (a) Om generatorn är $\mathbf{G}$ och inkomstvektorn är $\mathbf{f} = [500\ 250\ 100\ \ -600]^t$ fås den förväntade medelinkomsten till $\mathbf{p}\,\mathbf{f} = 258.56$ och om generatorns understa rad byts mot $[3\ 0\ 0\ \ -3]$ och $\mathbf{f}$ mot $\mathbf{f} = [500\ 250\ 100\ \ -1200]^t$ fås den förväntade medelinkomsten till $\mathbf{p}\,\mathbf{f} = 310.5$. Det är alltså lönsamt i det långa loppet att ta den extra utgiften.

5. Förväntad medelkostnad per tidsenhet är $\mathbf{p}\,\mathbf{f} + \mathbf{p}\,(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\,\mathbf{1} = 3562.79$ och om man tar underhållskostnaden om 400 per tidsenhet, så reduceras förväntad medelkostnad per tidsenhet till $\mathbf{p}\,\mathbf{f}/2 = 269.77$. Att göra underhållet och ta kostnaden för detta är alltså klart ”worthwhile”.

6. (a) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 12 & -22 & 10 & 0 \\ 0 & 12 & -22 & 10 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{bmatrix}$

   (b) $216/671 = 0.323$

   (c) $855/671 = 1.274$

7. $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -16 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -22 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & -26 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}$

8. (a) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3/200 & 1/100 & 1/200 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$

   (b) $100/107 = 0.935$

   (c) Den förväntade medelkostnaden per timma är USD 13.55 ifall man anlitar en utomstående reparatör, vilket är klart billigare än att anställa en egen reparatör (som ju kostar USD 40.00 per timma.

9. Tillståndsrum är $E = \{0, 1, 2, 3\}$ lagrade impulser.

   (a) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -90 & 90 & 0 & 0 \\ 0 & -90 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -90 & 90 \\ 60 & 0 & 0 & -60 \end{bmatrix}$ om tidsenheten är minuter.

   (b) $p(3) = 1/3 = 0.333$

   (c) 20

Kapitel 5

1. (a) $15/2 = 7.5$ st

   (b) $60/15 = 4$ minuter

   (c) $(30 - 12) \cdot 15/60 = 4.5$ st

   (d) $e^{-4.5}(4.5^2/2!) = 0.112$

   (e) $e^{-4.5} = 0.011$

   (f) $(12 - 5) + 60/15 = 11$ minuter

2. M/M/1-kö med $\lambda = 8$ st/h, $\mu = 60/5 = 12$ st/h $\Rightarrow \rho = \lambda/\mu = 2/3 = 0.667$

   (a) $\Pr\{N = 0\} = 1 - \rho = 0.333$

   (b) $\Pr\{N \leq 1\} = \Pr\{N_q = 0\} = (1 - \rho)(1 + \rho) = 0.556$

   (c) $W_q = 60\rho/(\mu - \lambda) = 10$ minuter

   (d) $\Pr\{N_q = 2\} = \Pr\{N = 3\} = (1 - \rho)\rho^3 = 0.098$

3. M/M/1-kö med $\lambda = 15$ st/h, $\mu = 60/3 = 20$ st/h $\Rightarrow \rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75$

   (a) $\Pr\{N > 0\} = \rho = 0.75$

   (b) $L_q = \rho^2/(1 - \rho) = 2.25$

   (c) $\Pr\{N_q \geq 1\} = \Pr\{N \geq 2\} = 1 - (1 - \rho)(1 + \rho) = 0.563$

   (d) $W = 1/(\mu - \lambda) = 0.2$

   (e) Nej

6. M/M/1/K-kö med $\lambda = 8$ st/h, $\mu = 60/6 = 10$ st/h $\Rightarrow \rho = \lambda/\mu = 4/5 = 0.8$. Vinsten är 5 USD/st. Effektiv ankomstintensitet är $\lambda_e = \lambda(1 - p_K) = 8 \cdot 0.827 = 6.61$ st/h, vilket ger medelvinsten $24\lambda_e \cdot 5 = 793.50$ USD/dygn om $K = 3$, och om $K = 4$ blir medelvinsten analogt uträknad 843.03 USD/dygn. Differensen är $843.03 - 793.50 = 49.53 < 60.00$ USD/dygn. Det lönar sig alltså inte att uppgradera till $K = 4$ och ta kostnaden för detta.

7. (a) Snittkostnaden för ett jobb är $C = 30L + 105\lambda p_K$. För $K = 3$ fås $L = 1.55$, $p_K = 0.2655$, vilket ger $C = 213.80$ USD/dygn. För $K = 4$ fås $L = 2.08$, $p_K = 0.2167$ och $C = 198.94$ USD/dygn. $K = 4$ ger alltså en lägre snittkostnad.

   (b) Man ska bestämma det K som minimerar C. Eftersom $\rho \approx 1.042 \approx 1$ kan det vara en god idé att räkna som om $\rho = 1$. Då gäller nämligen att $L = K/2$, $p_K = 1/(K+1)$, vilket ger $C = 15K + 630/(K+1)$. Standard matematik ger att C är minimal då $K = 5.48$, så $\min_K C$ fås då $K = 5$ eller då $K = 6$. Det visar sig att $C = 180$ för både $K = 5$ och $K = 6$. Men detta var en approximativ kalkyl gjord under antagandet att $\rho = 1$, vilket inte är riktigt sannt.

   (c) Under samma förutsättningar som ovan fås att den totala kostnaden är $400 + 180 = 580$ USD/dygn, och om verkstaden stängs, så har vi totala kostnaden $105\lambda = 630$ USD/dygn. Det är alltså dålig ekonomi att stänga verkstaden.

9. Uppgiften består i att jämföra tre kösystem. Nu används en M/M/2-kö med betjäningsintensitet $\mu = 24 \cdot 60/27 = 160/3 = 53.3$ jobb/dygn. Denna ska jämföras med en M/M/3-kö med samma betjäningsintensitet (alt A) och en M/M/1-kö med betjäningsintensiteten $\mu = 24 \cdot 60/10 = 144$ jobb/dygn (alt B). Ankomstintensiteten är $\lambda = 100$ jobb/dygn. Vi får följande för de tre alternativen:

	Nu	Alt A	Alt B
ρ	$15/16 = 0.9375$	$5/8 = 0.625$	$25/36 = 0.69$
p_0	$1/31 = 0.0323$	$16/121 = 0.132$	$11/36 = 0.306$
L	$480/31 = 15.48$	$305/121 = 2.52$	$25/11 = 2.27$

   (a) Alternativ B reducerar förväntat antal jobb i kön, L, mest

   (b) Kostnaden per jobb är $0.5 \cdot 24 = 12$ USD/dygn, kostnaden per arbetare är $40000/365 = 8000/73 = 109.59$ USD/dygn och kostnaden för en robot är $100000/365 = 20000/73 = 273.97$ USD/dygn. I nu-läget är alltså kostnaden $2 \cdot 109.59 + 15.48 \cdot 12 = 404.94$ USD/dygn. För alt A fås kostnaden $3 \cdot 109.59 + 2.52 \cdot 12 = 359.02$ USD/dygn och för alt B är den $273.97 + 2.27 \cdot 12 = 301.21$ USD/dygn. Alternativ B (med roboten) är alltså billigast i längden.

11. M/M/∞-kö med ankomstintensitet λ och betjäningsintensitet μ. Stationär fördelning för en sådan kö är Poi(λ/μ). Låt N beteckna antalet kunder i kön då stationära förhållanden råder.

   (a) $\Pr(N = n) = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$

   (b) $L = E[N] = \lambda/\mu$

   (c) $\mathrm{Var}[N] = \lambda/\mu$

   (d) $N_q = 0$, så $L_q = 0$ också

   (e) $W = 1/\mu$

15. Effektiv ankomstintensitet är $\lambda = 18.75$ st/h och betjänaren klarar att betjäna 20 st/h $\rightarrow \rho = 18.75/20 = 15/16 = 0.9375$. Nätet fungerar alltså som ett M/M/1-kösystem med dessa värden på λ, μ och ρ.

   (a) $\Pr(N = 0) = 1 - \rho = 1/16 = 0.0625$

   (b) $L = E[N] = \rho/(1 - \rho) = 15$

   (c) Ant gånger ett jobb betjänas är Geo(0.8) $\Rightarrow$ den sökta sannolikheten är $0.2 \cdot 0.8 = 0.16$, och

(d) det förväntade antalet $1/0.8 = 5/4 = 1.25$

(e) $W = L/\lambda = 0.8$ h

16. I jämnvikt är nod 1 en M/M/1-kö med $\lambda_1 = 17.5$ st/h och $\mu_1 = 20$ st/h $\Rightarrow \rho_1 = 17.5/20 = 0.875$, och nod 2 är en M/M/2-kö med $\lambda_2 = 27.5$ st/h och $\mu_2 = 20$ st/h $\Rightarrow \rho_2 = 27.5/40 = 0.6875$.

(a) $\Pr(N_1 = 0) = 1 - \rho_1 = 0.125$

(b) $\Pr(N_1 = 0, N_2 = 0) = \Pr(N_1 = 0) \cdot \Pr(N_2 = 0) = 0.125 \cdot 0.185 = 0.023$

(c) $\Pr(N_1 = 2) = (1 - \rho_1)\rho_1^2 = 0.0957$

(d) $\Pr(N_1 = 1, N_2 = 0) + \Pr(N_1 = 0, N_2 = 1) = 0.1094 \cdot 0.185 + 0.125 \cdot 0.254 = 0.052$

(e) $L = L_1 + L_2 = 7 + 2.607 = 9.61$ st

(f) $E[T_{\text{net}}] = L/\gamma_{\text{tot}} = 9.61/22 = 0.437$ h

(g) $E[T_{\text{net}}|\text{Jobbet startar i nod 1}] = \boldsymbol{\mu}\mathbf{R}\mathbf{W} = 0.62$ (här är $\boldsymbol{\mu} = [1 \quad 0]$,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.25 \\ 0.25 & 1.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

och $\mathbf{W}^{\text{t}} = [\, L_1/\lambda_1 \quad L_2/\lambda_2 \,] = [0.4 \quad 0.095]$)

(h) Nu är kostnaden $100L = 961$ USD/h. Det föreslagna nätet består av tre seriekopplade noder. Den första, nod 1, är en M/M/1-kö med $\lambda_1 = 12$, $\mu_1 = 20 \Rightarrow \rho_1 = 0.6$, den andra, nod 2, är en M/M/2-kö med $\lambda_2 = 22$, $\mu_2 = 20 \Rightarrow \rho_2 = 0.55$ och den tredje, nod 3, är en M/M/c_3-kö med $\lambda_3 = 22$, $\mu_3 = 20$. Av $\rho_3 < 1$ följer att $c_3 \geq 2$. Vi räknar ut att att $L_1 = 1.5$ och att $L_2 = 1.557$. Härur följer att $c_3 = 3$ ger en snittkostnad om minst $600 + 3.06 \cdot 100 = 909$ USD/h. Detta gäller också då $c_3 > 3$. Om $c_3 = 2$, så blir $L_3 = L_2 = 1.557 \Rightarrow L = 4.65 \Rightarrow$ kostnaden $400 + 465 = 865$ USD/h, vilket är en klar förbättring jämfört med den nuvarande kostnaden som är 961 USD/h och garanterat mindre än kostnaden då $c_3 = 3$ eller större.

17. Vi har noderna R, T och C. Total inintensitet $\gamma_{\text{tot}} = 24$ st/h fördelas på noderna så att $\gamma_R = 0.2\gamma_{\text{tot}} = 4.8$, $\gamma_T = 0.6\gamma_{\text{tot}} = 14.4$ och $\gamma_C = 0.2\gamma_{\text{tot}} = 4.8$ st/h. Det följer att nod R är en M/M/1-kö med $\lambda_R = \gamma_R = 4.8$, $\mu_R = 12$ st/h $\Rightarrow \rho_R = 4.8/12 = 0.4$, att nod T är en M/M/3-kö med $\lambda_T = 18$, $\mu_T = 10$ st/h $\Rightarrow \rho_T = 18/30 = 0.6$ och att nod C är en M/M/2-kö med $\lambda_C = 7.56$, $\mu_C = 5$ st/h $\Rightarrow \rho_C = 7.56/10 = 0.756$. I jämnvikt är antalet jobb vid de olika noderna oberoende.

(b) ”switching probability matrix” (alltså subtransitionsmatrisen, som beskriver hur jobben hoppar omkring mellan noderna i nätet) är

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.75 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) $L = L_R + L_T + L_C = 0.667 + 2.332 + 3.529 = 6.53$ st

(e) $W = L/\gamma_{\text{tot}} = 6.53/24 = 0.272$ h

(g) $\Pr(N_C \leq 1) = \Pr(N_C = 0) + \Pr(N_C = 1) = p_0 + p_1 = 0.139 + 0.139 \cdot 2 \cdot 0.756 = 0.349$ (jfr (5.23) och/eller övn 5.4). I genomsnitt i ca 35% av tiden är alltså någon rådgivare fri att telefonera.