

Kap 2 Markovkedjor

F01

Exempel 2.8 Två-steps tillverkningsprocess. Titta bara på figur 2.7 på sida 52. Diskutera begreppen transitionssannolikhet och transitionsmatris.

OH 1a

OH 1b

2.1 Grundläggande definitioner

Vi börjar med några grundläggande definitioner om stokastiska processer.

Definition 2.1 En *stokastisk process* är en följd av stokastiska variabler med gemensamt utfallsrum.

Definition 2.2 Det gemensamma utfallsrummet för variablerna i en stokastisk process kallas för processens *tillståndsrum*.

I hela kursen är tillståndsrummet, som ofta betecknas E , diskret, alltså ändligt eller uppräkneligt oändligt, och vi refererar till elementen i E som processens *tillstånd*.

Vi ska börja med att studera processer av typen

$$X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$$

Vi ska tänka på n som vår tidsvariabel. Här är alltså tiden *diskret*.

Sedan ska vi gå vidare med att studera processer med *kontinuerlig* tidsvariabel:

$$X = \{X_t; t \geq 0\}$$

Definition 2.3 En stokastisk process $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ med diskret tillståndsrum E säges vara en *Markovkedja*, om

$$\Pr\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \Pr\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$$

Sannolikheterna $\Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ kallas för kedjans *transitionssannolikheter*. Dessa säges vara *stationära* om de ej beror av n , dvs då

$$\Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \Pr\{X_1 = j | X_0 = i\}$$

Två vanliga beteckningar för sannolikheten för en transition ifrån i till j är $P(i, j)$ och p_{ij} . Feldman & Valdez-Flores verkar föredra den förstnämnda. Jag är van vid att använda den sistnämnda.

Kommentar Att kalla transitionssannolikheterna för stationära då de ej beror av n är olämpligt eftersom det kan ge upphov till missförstånd. Bättre är att säga att de är *homogena*. Då så är fallet brukar man säga att Markovkedjan är *homogen*. I denna kurs ska vi bara studera homogena Markovkedjor.

Notera att

$$\begin{aligned} & \Pr\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k, X_3 = l\} \\ &= \Pr\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} \Pr\{X_3 = l | X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\{X_0 = i, X_1 = j\} \Pr\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \Pr\{X_3 = l | X_2 = k\} \\
&= \Pr\{X_0 = i\} \Pr\{X_1 = j | X_0 = i\} \Pr\{X_2 = k | X_1 = j\} \Pr\{X_3 = l | X_2 = k\} \\
&= \mu(i)P(i, j)P(j, k)P(k, l)
\end{aligned}$$

där $\mu(i) = \Pr\{X_0 = i\}$.

Vi har alltså,

$$\Pr\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k, X_3 = l\} = \mu(i)P(i, j)P(j, k)P(k, l)$$

Analogt inses,

$$\Pr\{X_1 = j, X_2 = k, X_3 = l | X_0 = i\} = P(i, j)P(j, k)P(k, l)$$

Transitionssannolikheterna brukar man sätta ihop till en matris $\mathbf{P}$, kallad *transitionsmatrisen*. Elementet i rad i , kolumn j i $\mathbf{P}$ betecknas i boken $P(i, j)$. En annan vanlig beteckning är p_{ij} . Ett tredje sätt att beteckna elementet på rad i , kolumn j i matrisen $\mathbf{P}$ är $\mathbf{P}(i, j)$.

Om tillståndsrummet är $E = \{1, 2, 3\}$, så är alltså

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(1, 1) & P(1, 2) & P(1, 3) \\ P(2, 1) & P(2, 2) & P(2, 3) \\ P(3, 1) & P(3, 2) & P(3, 3) \end{bmatrix}$$

Potenser av $\mathbf{P}$ betecknas $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$, etc. Elementet i rad i , kolumn j i den n :te potensen av $\mathbf{P}$, alltså i matrisen $\mathbf{P}^n$, betecknas i boken $P^n(i, j)$. Jag kommer ofta att skriva $\mathbf{P}^n(i, j)$. En annan vanlig beteckning är $p_{ij}^{(n)}$.

Ibland behöver man en beteckning för den i :te raden i transitionsmatrisen eller någon potens av denna. Vi låter $P(i, \cdot)$ eller $\mathbf{P}(i, \cdot)$ beteckna rad i i $\mathbf{P}$. Analogt låter vi $P(\cdot, j)$ eller $\mathbf{P}(\cdot, j)$ beteckna den j :te kolumnen i $\mathbf{P}$. Analog beteckningar har vi för raderna och kolumnerna i $\mathbf{P}^n$.

I fallet ovan med $E = \{1, 2, 3\}$ gäller alltså

$$P(i, \cdot) = \mathbf{P}(i, \cdot) = [P(i, 1) \quad P(i, 2) \quad P(i, 3)]$$

för $i = 1, 2, 3$, och

$$P(\cdot, j) = \mathbf{P}(\cdot, j) = \begin{bmatrix} P(1, j) \\ P(2, j) \\ P(3, j) \end{bmatrix}$$

för $j = 1, 2, 3$.

Sannolikhetsfördelningar på tillståndsrummet E ska vi tänka på som radvektorer. Om man t.ex anger att kedjans initialfördelning är μ (alltså att X_0 har fördelningen μ), så tänker vi oss att μ är en radvektor och att elementet på plats i är

$$\mu(i) = \Pr\{X_0 = i\}$$

Om, som ovan, $E = \{1, 2, 3\}$, så är

$$\mu = [\mu(1) \quad \mu(2) \quad \mu(3)]$$

Glöm inte att

$$\mu(i) \geq 0, \quad \forall i$$

$$\sum_i \mu(i) = 1$$

Annars kan ju inte μ definiera en sannolikhetsfördelning.

Analogt gäller att

$$P(i, j) \geq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_j P(i, j) = 1$$

Radvektorn $P(i, \cdot)$ är ju en sannolikhetsfördelning. Matriser som satisfierar detta kallas ofta för *Markovmatriser*.

Istället för transitionssannolikhet får man gärna säga *övergångssannolikhet*, och, analogt, istället för transitionsmatris kan man gott säga *övergångsmatris*.

Exempel 2.1 (sida 40) Transitionsmatrisen är

OH 2

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Notera t.ex att

$$\Pr\{X_{n+1} = 1 | X_n = 0\} = \Pr\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} = P(0, 1) = 1$$

samt

$$\Pr\{X_{n+1} = 1 | X_n = 1\} = \Pr\{X_1 = 1 | X_0 = 1\} = P(1, 1) = 0.9$$

Notera dessutom att

F02

$$\begin{aligned} \Pr\{X_{n+2} = 1 | X_n = 0\} &= \Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 0\} \\ &= \Pr\{X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 0\} + \Pr\{X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0\} \\ &= P(0, 0)P(0, 1) + P(0, 1)P(1, 1) = P(0, \cdot)P(\cdot, 1) = 0.9 \end{aligned}$$

samt, analogt,

$$\begin{aligned} \Pr\{X_{n+2} = 1 | X_n = 1\} &= \Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 1\} \\ &= \Pr\{X_2 = 1, X_1 = 0 | X_0 = 1\} + \Pr\{X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 1\} \\ &= P(1, 0)P(0, 1) + P(1, 1)P(1, 1) = P(1, \cdot)P(\cdot, 1) = 0.91 \end{aligned}$$

J.f.r med uträkningarna som behövs för att beräkna $\mathbf{P}^2$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.09 & 0.91 \end{bmatrix}$$

2.2 Transitioner i flera steg

Tag tillstånd $i, j \in E$ och betrakta

$$\begin{aligned}\Pr\{X_2 = j | X_0 = i\} &= \sum_k \Pr\{X_1 = k, X_2 = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_k \Pr\{X_1 = k | X_0 = i\} \Pr\{X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i\} \\ &= \sum_k \Pr\{X_1 = k | X_0 = i\} \Pr\{X_2 = j | X_1 = k\} \\ &= \sum_k P(i, k)P(k, j) = P(i, \cdot)P(\cdot, j) = \mathbf{P}^2(i, j)\end{aligned}$$

Matrisen $\mathbf{P}^2$ ger oss alltså alla två-stegssannolikheter. Med induktion kan man nu visa allmänt att $\mathbf{P}^n$ ger oss sannolikheterna för transitioner i n steg. Vi har alltså

Sats 2.4 Låt $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ vara en Markovkedja med tillståndsrum E och transitionsmatris $\mathbf{P}$. Då gäller, för $i, j \in E$ och $n = 1, 2, \dots$,

$$\Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = \mathbf{P}^n(i, j)$$

Exempel 2.2 (sida 41, 43) Räkna ut $\mathbf{P}^2$. Notera t.ex att

OH 3a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2(b, c) &= \sum_j P(b, j)P(j, c) = P(b, \cdot)P(\cdot, c) \\ &= [0.75 \quad 0 \quad 0.25] \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0.75 \cdot 0.50 + 0 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0 = 0.375\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2(c, c) &= \sum_j P(c, j)P(j, c) = P(c, \cdot)P(\cdot, c) \\ &= [0.75 \quad 0.25 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0.75 \cdot 0.50 + 0.25 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0 = 0.4375\end{aligned}$$

Etc, så att

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.125 & 0.125 \\ 0.1875 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix}$$

Notera nu t.ex att

$$\begin{aligned}\Pr\{X_2 = a | X_0 = b\} &= \mathbf{P}^2(b, a) = 0.1875 \\ \Pr\{X_2 = c | X_0 = b\} &= \mathbf{P}^2(b, c) = 0.375\end{aligned}$$

$$\Pr\{X_2 = c | X_0 = c\} = \mathbf{P}^2(c, c) = 0.4375$$

Exempel 2.5 (sida 45-46) Notera t.ex att

OH 4a

$$\Pr\{X_{1997} = s, X_{2000} = s | X_{1996} = s\} = P(s, s)P^3(s, s) = 0.55 \cdot 0.5023 \approx 0.276$$

Sats 2.5 Låt dessutom $f : E \rightarrow R$. Då gäller, för $i \in E$ och $n = 1, 2, \dots$,

$$E[f(X_n) | X_0 = i] = \mathbf{P}^n \mathbf{f}(i)$$

Obs att $E[f(X_n) | X_0 = i] = \sum_j f(j) \Pr\{X_n = j | X_0 = i\}$. Detta är ett s.k. *betingat väntevärde*. Det räknas ut m.a.p den betingade fördelningen för X_n givet att $X_0 = i$.

Här är $\mathbf{f}$ kolumnvektorn med element $f(i)$ på rad i och $\mathbf{P}^n \mathbf{f}(i)$ är elementet på rad i i kolumnvektorn $\mathbf{P}^n \mathbf{f}$.

Om t.ex $E = \{1, 2, 3\}$, så är

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

Obs att ofta använder vi den s.k. transponat-operationen och skriver istället

$$\mathbf{f} = [f(1) \quad f(2) \quad f(3)]^T$$

Vidare är

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n \mathbf{f}(i) &= \mathbf{P}^n(i, \cdot) \mathbf{f} = [P^n(i, 1) \quad P^n(i, 2) \quad P^n(i, 3)] \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} \\ &= P^n(i, 1)f(1) + P^n(i, 2)f(2) + P^n(i, 3)f(3) \end{aligned}$$

Tanken med satsen är att om man har en kostnad om $f(i)$ kr varje gång kedjan befinner sig i tillstånd i , så talar satsen om hur genomsnittskostnaden vid tidpunkten n , förutsatt att den vid tidpunkten 0 befann sig i tillståndet i , ska beräknas.

Bevis av sats 2.5

$$\begin{aligned} E[f(X_n) | X_0 = i] &= \sum_j f(j) \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_j P^n(i, j) f(j) = \mathbf{P}^n(i, \cdot) \mathbf{f} = \mathbf{P}^n \mathbf{f}(i) \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Exempel 2.5 (forts; sida 46) Antag att (enhet: USD)

OH 4b

$$f(s) = 1200, \quad f(w) = 1500, \quad f(c) = 2500$$

Då

$$E[f(X_{1999}) | X_{1996} = s] = E[f(X_3) | X_0 = s] = \mathbf{P}^3 \mathbf{f}(s) = \mathbf{P}^3(s, \cdot) \mathbf{f}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5023 & 0.4334 & 0.0643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200 \\ 1500 \\ 2500 \end{bmatrix}$$

$$= 1200 \cdot 0.5023 + 1500 \cdot 0.4334 + 2500 \cdot 0.0643 = 1413.61 \approx 1414$$

Exempel 2.2 (forts, sida 44) Varje gång säljaren är i stad a tjänar han USD 1000, OH 3b varje gång han är i stad b tjänar han USD 1200 och varje gång han är i stad c tjänar han USD 1250. Vi definierar en vinstfunktion

$$f(a) = 1000, \quad f(b) = 1200, \quad f(c) = 1250$$

och motsvarande kolumnvektor

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1000 & 1200 & 1250 \end{bmatrix}^T$$

Säljarens förväntade förtjänst vecka nr 2 givet att han startar vecka 0 i a , är

$$E[f(X_2)|X_0 = a] = \mathbf{P}^2 \mathbf{f}(a) = \mathbf{P}^2(a, \cdot) \mathbf{f} = \sum_j \mathbf{P}^2(a, j) f(j)$$

$$= 0.75 \cdot 1000 + 0.125 \cdot 1200 + 0.125 \cdot 1250 = 1056.25$$

Antag nu att vi inte vet i vilket tillstånd kedjan startar men att vi istället känner OH 3b kedjans initialfördelning (alltså X_0 :s fördelning),

$$\Pr\{X_0 = a\} = 0.5, \quad \Pr\{X_0 = b\} = 0.3, \quad \Pr\{X_0 = c\} = 0.2$$

Då kan vi t.ex räkna ut

$$\Pr\{X_1 = a\} = \sum_j \Pr\{X_0 = j, X_1 = a\}$$

$$= \sum_j \Pr\{X_0 = j\} \Pr\{X_1 = a|X_0 = j\}$$

Fördelningen för X_0 låter vi bli en radvektor μ ,

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Då följer

$$\Pr\{X_1 = a\} = \sum_j \mu(j) P(j, a)$$

$$= 0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.75 = 0.375$$

Poängen med uträkningen är att

$$\sum_j \mu(j) P(j, a) = \mu P(\cdot, a) = \mu \mathbf{P}(a)$$

($\mu \mathbf{P}$ är en radvektor och $\mu \mathbf{P}(a)$ är elementet i kolumnen som svarar mot tillståndet a i denna radvektor).

Ofta skriver man $\Pr_\mu\{X_1 = a\}$ istället för $\Pr\{X_1 = a\}$ för att tydliggöra att initialfördelningen är μ . Vi har alltså visat att $\Pr_\mu\{X_1 = a\} = \mu\mathbf{P}(a)$ och mer allmänt gäller

Sats 2.6 Låt dessutom μ vara kedjans initialfördelning. Då gäller

$$\Pr_\mu\{X_n = j\} = \mu\mathbf{P}^n(j)$$

Obs att $\mu\mathbf{P}^n$ är en radvektor och $\mu\mathbf{P}^n(j)$ är dess element i kolumn j . Obs också att $\mu\mathbf{P}^n(j) = \mu\mathbf{P}^n(\cdot, j)$ (detta ser måhända konstigt ut, men högerledet är helt enkelt skalärprodukten av radvektorn μ och kolumnvektorn $\mathbf{P}^n(\cdot, j)$).

Bevis

$$\begin{aligned}\Pr_\mu\{X_n = j\} &= \sum_i \Pr\{X_0 = i, X_n = j\} \\ &= \sum_i \Pr\{X_0 = i\} \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_i \mu(i) P^n(i, j) = \mu P^n(\cdot, j) = \mu\mathbf{P}^n(j)\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Sats 2.7

$$E_\mu[f(X_n)] = \mu\mathbf{P}^n\mathbf{f}$$

Obs att $\mu\mathbf{P}^n\mathbf{f}$ är skalärprodukten mellan radvektorn $\mu\mathbf{P}^n$ och kolumnvektorn $\mathbf{f}$, som lika gärna kan beräknas som skalärprodukten mellan radvektorn μ och kolumnvektorn $\mathbf{P}^n\mathbf{f}$. M.a.o,

$$\mu\mathbf{P}^n\mathbf{f} = (\mu\mathbf{P}^n)\mathbf{f} = \mu(\mathbf{P}^n\mathbf{f})$$

Bevis

$$E_\mu[f(X_n)] = \sum_j f(j) \Pr_\mu\{X_n = j\} = \sum_j \mu\mathbf{P}^n(j) f(j) = \mu\mathbf{P}^n\mathbf{f}$$

vilket skulle visas.

I beviset ovan visade vi att

$$E_\mu[f(X_n)] = (\mu\mathbf{P}^n)\mathbf{f}$$

Om vi nu använder att $(\mu\mathbf{P}^n)\mathbf{f} = \mu(\mathbf{P}^n\mathbf{f})$ får vi

$$E_\mu[f(X_n)] = \mu(\mathbf{P}^n\mathbf{f}) = \sum_i \mu(i) \mathbf{P}^n\mathbf{f}(i) = \sum_i E[f(X_n) | X_0 = i] \Pr\{X_0 = i\}$$

Att

$$E_\mu[f(X_n)] = \sum_i E[f(X_n) | X_0 = i] \Pr\{X_0 = i\}$$

är ett mycket användbart sätt att beräkna väntevärden. Det gäller inte bara för Markovkedjor, utan också allmänt så här:

$$E[f(X)] = \sum_y E[f(X) | Y = y] P(Y = y)$$

om Y är diskret. Vi kommer att använda oss av denna teknik åtminstone en gång längre fram i kursen. En analog formel gäller om Y är kontinuerlig med täthet $f(y)$.

Tänk själv igenom hur sats 2.7 övergår i sats 2.6, om man som initialfördelning först tar

$$\mu = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

(d.v.s $\Pr\{X_0 = 1\}$) och sedan generaliserar till $\Pr\{X_0 = i\}$, och hur sats 2.7 övergår i sats 2.5 om man som kostnadsfunktion först tar

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{då } i = 1 \\ 0 & \text{då } i \neq 1 \end{cases}$$

och sedan generaliserar. Om man som initialfördelning väljer $\mu = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ och samtidigt som kostnadsvektor väljer $\mathbf{f} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$ och generaliserar, så övergår sats 2.7 i sats 2.4.

Så sats 2.7 kan man gott säga sammanfattar hur man med matrisalgebra räknar ut sannolikheter och väntevärden för Markovkedjor.

För att komma vidare behöver vi inse att det finns olika typer av tillstånd och hur dessa fungerar probabilistiskt.

2.3 Klassificering av tillstånden

Definition "First passage"-tiden är

$$T^j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

Alltså: T^j är tiden det tar tills kedjan kommer till j . Obs att $T^j = \infty$ om kedjan aldrig kommer till j , dvs om $\{n \geq 1 : X_n = j\} = \emptyset$.

Och: $T^j < \infty$ om kedjan någon gång besöker j , d v s om $\{n \geq 1 : X_n = j\} \neq \emptyset$.

Definition "First passage"-sannolikheter:

$$F(i, j) = \Pr\{T^j < \infty | X_0 = i\}$$

$F(i, j)$ är alltså sannolikheten att kedjan över huvud taget kommer till j givet att den startar i i . Matrisen $\mathbf{F}$ samlar ihop dessa sannolikheter. Elementet på rad i , kolumn j i $\mathbf{F}$ är alltså $F(i, j)$.

Exempel 2.8 (sida 51)

OH 1a

$$F(1, s) = \Pr\{T^s < \infty | X_0 = 1\}$$

är sannolikheten att en enhet hamnar i "scrap"-bingen och

$$F(1, g) = \Pr\{T^g < \infty | X_0 = 1\}$$

är sannolikheten att en enhet blir godkänd. Observera att

$$F(1, s) + F(1, g) = 1$$

ty exakt en av händelserna $T^s < \infty$ och $T^g < \infty$ måste ju inträffa.

Senare i kursen ska vi lära oss hur man räknar ut dessa sannolikheter.

Definition "Number of visits (or returns) to" j är

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} I(X_n, j)$$

Här och fortsättningsvis låter vi $\mathbf{I}$ beteckna enhetsmatrisen och $I(i, j)$ är dess element på rad i , kolumn j . Följaktligen,

$$I(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Vi ser att N_j är lika med totala antalet besök i tillstånd j (inklusive det som ev sker då $n = 0$).

Definition "Number of returns"-väntevärden:

$$R(i, j) = E[N_j | X_0 = i]$$

Matrisen $\mathbf{R}$ samlar ihop dessa väntevärden, som mycket väl kan vara oändliga. Elementet på rad i , kolumn j i $\mathbf{R}$ är alltså $R(i, j)$.

Kommentar I grundkursen sade vi att N_j :s väntevärde existerar och är lika med **F03**

$$E[N_j] = \sum_k k \Pr\{N_j = k\}$$

om summan i högerledet är absolutkonvergent. En följd av detta är att alla väntevärden då blir ändliga. För stokastiska variabler som bara kan antaga positiva värden (vilket är fallet för N_j) brukar man utvidga definitionen av väntevärde och låta det vara oändligt om summan $\sum_k k \Pr\{N_j = k\} = \infty$.

Exempel 2.13 (forts av exempel 2.8; sida 62-63)

OH 6c

Den kostnad vi har för ett råämne är

$$C = 150 + 200N_1 + 300N_2 + 50I_{\{T^s < \infty\}}$$

där $I_{\{T^s < \infty\}}$ är den stokastiska variabel som är $= 1$ om händelsen $T^s < \infty$ inträffar och $= 0$ annars.

Vi får att genomsnittskostnaden per processad enhet är

$$\begin{aligned} E[C | X_0 = 1] \\ &= 150 + 200E[N_1 | X_0 = 1] + 300E[N_2 | X_0 = 1] + 50 \Pr\{T^s < \infty | X_0 = 1\} \\ &= 150 + 200R(1, 1) + 300R(1, 2) + 50F(1, s) \end{aligned}$$

Definition 2.9 Tillståndet j är transient då $F(j, j) < 1$.

Definition 2.10 Tillståndet j är rekurrent då $F(j, j) = 1$

Man kan visa att om tillståndsrummet E är ändligt, så $F(j, j) < 1 \Leftrightarrow R(j, j) < \infty$.

Exempel 2.3 (sida 51) Tillståndet 4 är transient, tillstånden 1, 2, 3 är rekurrenta. OH 5

Rekurrenta tillstånd kan vara periodiska. Tex

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ska i det som sägs nedan alltid förutsätta att tillstånden är *aperiodiska*, men avstår från att gå in på hur man avgör om så är fallet. Man säger ofta att en Markovkedja är *aperiodisk* om alla tillstånden är aperiodiska.

Definition 2.11 En mängd $C \subseteq E$ säges vara sluten, då

$$\sum_{j \in C} P(i, j) = 1$$

för alla $i \in C$.

Alltså: då kedjan väl hamnat i en sluten mängd, kan den ej ta sig därifrån.

De minimala slutna mängderna spelar en väldigt viktig roll i förståelsen av Markovkedjors dynamik.

Definition 2.12 Om $C \subseteq E$ är sluten och varje äkta icke-tom delmängd av C ej är sluten, så säges C vara irreducibel. Ett tillstånd i , sådant att enpunktsmängden $\{i\}$ är sluten kallas absorberande.

Eget tillägg Om E är irreducibel, säger vi att kedjan är det.

Obs att i är absorberande om, och endast om, $P(i, i) = 1$.

Sats 2.13 Om det finns ett transient tillstånd i en irreducibel mängd, så är alla tillstånd i den transienta. Annars är alla tillstånden rekurrenta.

Bevisas ej.

Sats 2.14 I en ändlig irreducibel mängd C är alla tillstånden rekurrenta.

Bevis Om ett tillstånd i C är transient, så är alla det enligt sats 2.13 och då följer att kedjan så småningom lämnar C . Men då kan inte C vara sluten. Denna motsägelse innebär att inget tillstånd kan vara transient, vilket skulle visas.

Definition Två tillstånd i, j kommunicerar om det är möjligt att någon gång nå j från i och omvänt.

Sats 2.15 En sluten mängd $C \subseteq E$ är irreducibel om, och endast om, varje tillstånd i C kommunicerar med varje annat tillstånd i C .

Kommentar Att C är sluten innebär att tillstånden i C inte kan kommunicera med ett tillstånd utanför C .

Exempel 2.3 (sida 52) Irreducibla klasser är $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2, 3\}$ så tillståndet 1 är absorberande. OH 5

Exempel 2.8 Tillstånden 1, 2 är transienta och tillstånden s, g är absorberande. OH 1a
Irreducibla klasser är följaktligen $E_s = \{s\}$, $E_g = \{g\}$. OH 6a

2.4 Stationär fördelning ("Steady-state behaviour")

Vi ska nu studera vad som händer med matrisen $\mathbf{P}^n$, då $n \rightarrow \infty$. Huvudsatsen i avsnittet är denna:

Sats 2.16 Antag att kedjan är irreducibel och aperiodisk, samt att tillståndsrummet E är ändligt. Då finns en sannolikhetsfördelning π , sådan att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = \pi(j)$$

Radvektorn π ges av

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

Feldman & Valdez-Flores kallar π för "steady state"-sannolikheter. Jag gillar att kalla π för kedjans *invarianta* fördelning. Vanligast är nog att man kallar π för kedjans *stationära* fördelning.

Vi ska inte visa denna satsen.

Faktumet $\pi \mathbf{P} = \pi$ medför att $\pi \mathbf{P}^n = \pi$ för alla $n \geq 1$. Vi har alltså att

$$\Pr_{\pi}\{X_n = j\} = \pi(j)$$

för alla $n \geq 1$ och tillstånd $j \in E$.

Exempel 2.2 Ekvationen $\pi \mathbf{P} = \pi$ löses av

OH 3b

$$\pi = \frac{1}{7} [3 \quad 2 \quad 2] \approx [0.428 \quad 0.286 \quad 0.286]$$

Observera att

$$(2\pi) \mathbf{P} = 2(\pi \mathbf{P}) = 2\pi$$

så alla vektorer proportionella mot π satisfierar $\pi \mathbf{P} = \pi$. T.ex gäller att

$$[3 \quad 2 \quad 2] \mathbf{P} = [3 \quad 2 \quad 2]$$

När vi talar om en lösning till ekvationen $\pi \mathbf{P} = \pi$ menar vi alltid att lösningen ska definiera en sannolikhetsfördelning, vilket innebär att

$$\min_i \pi(i) \geq 0 \quad \text{och} \quad \sum_i \pi(i) = 1$$

Exempel 2.3 (sida 57) Transitionssannolikheter i den irreducibla klassen $E_2 = \{2, 3\}$ kan läggas ihop i en egen transitionsmatris

OH 5

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

och man kan lösa ut π ur $\pi \mathbf{P}_2 = \pi$. Lösningen är

$$\pi = \frac{1}{12} [5 \quad 7] \approx [0.417 \quad 0.583]$$

och tolkningen är att om kedjan någon gång kommer till E_2 , så stannar den där för alltid och, efter lång tid, är sannolikheten att den i ett visst tidsögonblick är i, t ex, tillstånd 2 är $\pi(2) = 5/12$.

Sats 2.17 Låt E_1 vara en irreducibel mängd av tillstånd och låt $\mathbf{P}_1$ är restriktionen av $\mathbf{P}$ till E_1 . Låt dessutom π vara $\mathbf{P}_1$:s invarianta fördelning och låt $F(i, j) = \Pr\{T^j < \infty | X_0 = i\}$. Tag tillstånd $i, j \in E$.

(a) Om j är transient,

$$\lim_n \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = 0$$

(b) Om $j \in E_1$,

$$\lim_n \Pr\{X_n = j | X_0 = i\} = F(i, j)\pi(j)$$

(c) Om $j \in E_1$ och $X_0 \in E_1$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} I(X_m, j) = \pi(j)$$

(d) Om j är rekurrent,

$$E[T^j | X_0 = j] = \frac{1}{\pi(j)}$$

Obs att denna sats är en generalisering av sats 2.16. Den ska ej bevisas.

Exempel 2.3 Från sats 2.17 följer att

F04

OH 5

$$\Pr\{X_n = 4 | X_0 = 4\} \rightarrow 0$$

ty tillståndet 4 är transient. Notera att $F(4, 4) = 0.7$, ty om $X_0 = 4$, så inträffar $T^4 < \infty$ om, och endast om, $X_1 = 4$. Man kan faktiskt räkna ut $F(4, 2) = F(4, 3)$ och $F(4, 1)$ så här:

$$F(4, 2) = F(4, 3) = \frac{0.1}{0.1 + 0.2} = \frac{1}{3}$$

och att

$$F(4, 1) = \frac{0.2}{0.1 + 0.2} = \frac{2}{3}$$

Vi ska senare se detta och återkomma till hur man beräknar sannolikheter som dessa i mer komplicerade fall.

Sats 2.17 ger nu att

$$\Pr\{X_n = 2 | X_0 = 4\} \rightarrow F(4, 2)\pi(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$$

$$\Pr\{X_n = 3 | X_0 = 4\} \rightarrow F(4, 3)\pi(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

och att

$$\Pr\{X_n = 1 | X_0 = 4\} \rightarrow F(4, 1) = \frac{2}{3} = \frac{24}{36}$$

Exempel 2.8 Enl sats 2.17(b) gäller $\mathbf{P}^n(1, s) \rightarrow F(1, s)$ då $n \rightarrow \infty$. Notera nu att OH 6a

$$\mathbf{P}^n(1, s) = \sum_j \mathbf{P}^{n-1}(1, j)P(j, s)$$

Låt $E_T = \{1, 2\}$ och låt $\mathbf{Q}$ vara restriktionen av $\mathbf{P}$ till E_T . D.v.s,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Då,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n(1, s) &= \sum_{j \in E_T} \mathbf{Q}^{n-1}(1, j)P(j, s) + \mathbf{P}^{n-1}(1, s)P(s, s) + \mathbf{P}^{n-1}(1, g)P(s, g) \\ &= \sum_{j \in E_T} \mathbf{Q}^{n-1}(1, j)P(j, s) + \mathbf{P}^{n-1}(1, s) \end{aligned}$$

ty $P(s, s) = 1$ och $P(g, s) = 0$. Låt $\mathbf{b}_s$ vara kolumnvektorn med elementet $\mathbf{b}_s(j) = P(j, s)$ på rad $j \in E_T$. D.v.s

OH 6b

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Då,

$$\mathbf{P}^n(1, s) = \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{b}_s(1) + \mathbf{P}^{n-1}(1, s)$$

Medelst induktion fås nu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n(1, s) &= \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{b}_s(1) + \mathbf{Q}^{n-2}\mathbf{b}_s(1) + \mathbf{P}^{n-2}(1, s) \\ &= \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k \mathbf{b}_s(1) \end{aligned}$$

ty $\mathbf{P}^{n-n}(1, s) = \mathbf{I}(1, s) = 0$.

Vi har alltså

$$\mathbf{P}^n(1, s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k \mathbf{b}_s(1)$$

Det är inte svårt att visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

J.f.r med en vanlig geometrisk serie. Medelst gränsövergång följer därför

$$F(1, s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_s(1)$$

Analogt,

$$F(2, s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_s(2)$$

Detta är faktiskt innehållet i allt väsentligt i sats 2.19, som vi snart kommer till.

2.5 Beräkningar

Vi ska nu titta på hur man beräknar ”number of returns”-väntevärden

$$R(i, j) = E[N_j | X_0 = i]$$

och ”first-passage”-sannolikheter

$$F(i, j) = \Pr\{T^j < \infty | X_0 = i\}$$

Om i och j tillhör samma irreducibla klass,

$$R(i, j) = \infty, \quad F(i, j) = 1$$

Om i är rekurrent och j ej i samma irreducibla klass,

$$R(i, j) = 0, \quad F(i, j) = 0$$

Om i är transient och j rekurrent,

$$R(i, j) = \begin{cases} \infty & \text{om } F(i, j) > 0 \\ 0 & \text{om } F(i, j) = 0 \end{cases}$$

I detta fall beror alltså $R(i, j)$ bara på om $F(i, j) = 0$ eller > 0 , vilket man oftast kan se i kedjans tillståndsgraf.

Fallet då både i och j är transienta diskuteras i nästa sats. Låt $\mathbf{Q}$ vara restriktionen av $\mathbf{P}$ till de transienta tillstånden.

Sats 2.18 För transienta $i, j \in E$ gäller

$$R(i, j) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(i, j)$$

Dessutom gäller att (jämför sats 2.8)

$$F(i, j) = \begin{cases} 1 - 1/R(j, j) & \text{då } i = j \\ R(i, j)/R(j, j) & \text{då } i \neq j \end{cases}$$

Vi bevisar ej detta resultat.

Vi behöver också veta hur $F(i, j)$ ska räknas ut då i är transient och j rekurrent.

Låt E_1 vara en irreducibel mängd av tillstånd och definiera en kolumnvektor $\mathbf{b}_1$ så att elementet på rad i (svarande mot det transienta tillståndet i) är

$$\mathbf{b}_1(i) = \Pr\{X_1 \in E_1 | X_0 = i\} = \sum_{k \in E_1} P(i, k)$$

Sats 2.19 Om i är transient och $j \in E_1$,

$$F(i, j) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_1(i)$$

Vi bevisar ej detta resultat.

Ibland behöver man också följande två resultat:

Sats 2.20 För en irreducibel aperiodisk Markovkedja,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \pi \mathbf{f}$$

där π är kedjans invarianta fördelning.

Observera dessutom att

$$\begin{aligned} \pi \mathbf{f} &= \sum_j \pi(j) f(j) = \sum_j \lim_n P^n(i, j) f(j) \\ &= \lim_n \sum_j P^n(i, j) f(j) = \lim_n E[f(X_n) | X_0 = i] \end{aligned}$$

Sats 2.21 Låt $0 < \alpha < 1$ och antag att kedjan är irreducibel och aperiodisk. Då

$$E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f(X_n) | X_0 = i \right] = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{P})^{-1} \mathbf{f}(i)$$

Tänk på α som en *diskonteringsfaktor* (värdet idag av 1 kr imorgon). Om inflationen eller räntan är 10%, så är $\alpha = 1/1.1 = 10/11 \approx 0.909$. Men α behöver inte definieras så strikt. Man kan gott tänka sig att en beslutsfattare väljer att räkna med ett annat värde på α som bättre reflekterar hans/hennes syn på värdet idag av framtida vinster eller kostnader.

Skiss av beviset sats 2.21 (gjordes ej på föreläsning)

F05a

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f(X_n) | X_0 = i \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E[f(X_n) | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbf{P}^n \mathbf{f}(i) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \mathbf{P}^n \right) \mathbf{f}(i) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \mathbf{P})^n \right) \mathbf{f}(i) = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{P})^{-1} \mathbf{f}(i) \end{aligned}$$

ty $0 < \alpha < 1$, vilket implicerar att $\|\alpha \mathbf{P}\| < 1$. Vilket skulle visas.

Här är några exempel som ska illustrera satserna i detta avsnitt.

Exempel 2.3 De flesta elementen i $\mathbf{F}$ och $\mathbf{R}$ kan vi beräkna utifrån kunskap om vilka tillstånd som är transienta och vilka de irreducibla klasserna är. Irreducibla klasser är $E_1 = \{1\}$ och $E_2 = \{2, 3\}$, och 4 är det enda transienta tillståndet.

Sats 2.18 ger att

$$R(4, 4) = \frac{1}{1 - P(4, 4)} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$

ty

$$\mathbf{Q} = [P(4, 4)] \Rightarrow \mathbf{I} - \mathbf{Q} = [1 - P(4, 4)]$$

$$\Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\frac{1}{1-P(4,4)} \right] = \left[\frac{1}{0.3} \right] = \left[\frac{10}{3} \right]$$

Vi får att

$$F(4,4) = 1 - \frac{1}{R(4,4)} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Observera att vi hade kunnat räkna ut $F(4,4)$ så här:

$$F(4,4) = \Pr\{T^4 < \infty | X_0 = 4\} = \Pr\{X_1 = 4 | X_0 = 4\} = P(4,4) = \frac{7}{10}$$

ty då $X_0 = 4$ är $T^4 < \infty$ om, och endast om, $X_1 = 4$.

Vi har också att $\mathbf{b}_1 = [\mathbf{b}_1(4)]$, där

$$\mathbf{b}_1(4) = \Pr\{X_1 \in E_1 | X_0 = 4\} = 0.2$$

och att $\mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_2(4)]$, där

$$\mathbf{b}_2(4) = \Pr\{X_1 \in E_2 | X_0 = 4\} = 0.1$$

(I och med att det bara finns ett transient tillstånd, så blir alla storheterna i satserna 2.18 och 2.19 skalära.) Sats 2.19 ger

$$F(4,1) = \frac{1}{0.3} \cdot 0.2 = \frac{2}{3}$$

och

$$F(4,3) = F(4,2) = \frac{1}{0.3} \cdot 0.1 = \frac{1}{3}$$

vilket överensstämmer exakt med en tidigare uträkning.

Exempel 2.8, 2.13 Kedjan har två transienta tillstånd och två absorberande. De transienta tillstånden är 1 och 2 och de absorberande tillstånden är s och g . Vi har alltså två irreducibla klasser som vi kan kalla $E_s = \{s\}$ och $E_g = \{g\}$. Restriktionen av $\mathbf{P}$ till de transienta tillstånden är

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$$

vilket ger att

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{180}{137} & \frac{140}{137} \\ \frac{10}{137} & \frac{160}{137} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.3139 & 1.0219 \\ 0.0730 & 1.1679 \end{bmatrix}$$

Vi ser att

$$R(1,1) = \frac{180}{137} \approx 1.3139$$

och

$$R(1,2) = \frac{140}{137} \approx 1.0219$$

Vi har även att

$$b_s(1) = \Pr\{X_1 = s | X_0 = 1\} = 0.1$$

$$b_s(2) = \Pr\{X_1 = s | X_0 = 2\} = 0.05$$

så

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

och

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{25}{137} \\ \frac{9}{137} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.1825 \\ 0.0657 \end{bmatrix}$$

Härur följer

$$F(1, s) \approx 0.1825, \quad F(2, s) \approx 0.0657$$

Analogt gäller att

$$\begin{aligned} b_g(1) &= 0 \\ b_g(2) &= 0.8 \end{aligned}$$

så

$$\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

och

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{b}_g = \begin{bmatrix} \frac{112}{137} \\ \frac{128}{137} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.8175 \\ 0.9343 \end{bmatrix}$$

Härur följer

$$F(1, g) \approx 0.8175, \quad F(2, g) \approx 0.9343$$

Vi kan nu räkna ut snittkostnaden för en processad enhet:

OH 6c

$$\begin{aligned} E[C|X_0 = 1] &= 150 + 200R(1, 1) + 300R(1, 2) + 50F(1, s) \\ &= 150 + 200 \cdot \frac{180}{137} + 300 \cdot \frac{140}{137} + 50 \cdot \frac{25}{137} \\ &\approx 150 + 200 \cdot 1.3139 + 300 \cdot 1.0219 + 50 \cdot 0.1825 \approx 728.47 \end{aligned}$$

Exempel 2.2

OH 3a

OH 3b

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_m) = \pi \mathbf{f} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 1250 \end{bmatrix} = \frac{7900}{7} \approx 1128.57$$

Observera att detta är säljarens genomsnittsvinst i det långa loppet och att den beror ej på i vilken stad han startade sin säljkampanj.

Vi ska använda den totala diskonterade vinsten till att avgöra var säljaren ska starta sin kampanj. Vi väljer därför en diskonteringsfaktor α och beräknar kolumnvektorn

$$E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f(X_n) | X_0 = \cdot \right] = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{P})^{-1} \mathbf{f}$$

Jag erhöll, för $\alpha = 0.95$,

$$E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f(X_n) | X_0 = \cdot \right] = \begin{bmatrix} 22496.4 \\ 22607.5 \\ 22647.9 \end{bmatrix}$$

och, för $\alpha = 0.1$,

$$E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f(X_n) | X_0 = \cdot \right] = \begin{bmatrix} 1134.37 \\ 1319.28 \\ 1368.06 \end{bmatrix}$$

I båda fallen ska han börja kampanjen i stad c .