

Kap 4 Markovprocesser

F07

Eller Markovkedjor i kontinuerlig tid. Senare kommer vi att ställa oss frågan ”varför exponentialfördelningen?” Jag tänker försöka att besvara den frågan redan nu i följande exempel.

Exempel Om X är Geo(p)-fördelad, så gäller att

$$P(X = k | X \geq k) = P(X = k | X > k - 1) = p$$

eftersom kännedom om att de $k - 1$ första försöken ej har lyckats, inte på något sätt påverkar sannolikheten att de k :te försöket lyckas. Man kan också räkna ut det så här:

$$P(X = k | X \geq k) = \frac{P(X = k, X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X = k)}{P(X \geq k)} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{(1-p)^{k-1}} = p$$

Alltså: den betingade sannolikheten att nästa försök lyckas, givet att vi vet att inget försök ännu har lyckats, är p.g.a oberoende lika med sannolikheten p att nästa försök lyckas.

Ett liknande faktum gäller för exponentialfördelningen.

Exempel Antag att T är exponentialfördelad med väntevärde $\mu = 1/\lambda$. Då

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

Notera nu att

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{1 - F(t)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{F(t+h) - F(t)}{h}}{1 - F(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + h)}{hP(T > t)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(T \leq t + h | T > t) \end{aligned}$$

Kvoten

$$\rho(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

brukar kallas för sönderfallsintensiteten (”hazard rate” på engelska). Multiplicerar vi med en mycket liten tidslängd h får vi approximativt sannolikheten att komponenten upphör att fungera i tidsintervallet $(t, t + h]$ givet att den fungerar vid tidpunkten t . M.a.o.,

$$P(T \leq t + h | T > t) \approx h \rho(t) = h \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

för små $h > 0$. För exponentialfördelningen gäller alltså att

$$P(T \leq t + h | T > t) \approx \lambda h$$

då $h > 0$ är litet.

Att sönderfallsintensiteten $\rho(t)$ är konstant och alltså ej beror av t är ett utmärkande drag för exponentialfördelningen, som ju är den enda livslängdsfördelning utan åldrande. Det innebär också att den betingade fördelningen för $T - s$ givet att $T > s$ också är exponential med väntevärde $\mu = 1/\lambda$. Det senare kan ju visas direkt och görs så i avsnittet om "forgetfulness property" i M & A på sida 113. Se också övning 4.35 i M & A, samt övning 1.23 i F & V-F.

Läs gärna igenom avsnittet om tillförlitlighet ("reliability") på sidorna 127 till 130 i M & A.

Generiskt exempel Vi ska titta på stokastiska processer $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ som hoppar omkring i ett tillståndsrums E som om den vore en Markovkedja, men där tiden den är i ett givet tillstånd nu är stokastisk. Om alla uppehållstiderna (uppehåll heter "sojourn" på engelska) är oberoende Exp-variabler, där väntevärdet är $1/\lambda$ och λ får lov att bero av tillståndet, så kommer den stokastiska processen Y att vara minneslös i den speciella Markovska betydelsen. OH 11a

Som är: Framtiden beror bara av nuet, inte av hur det har uppkommit.

F & V-F använder genomgående stora bokstäver till att beteckna stokastiska storheter och små för deras observerade värden. J.f.r med grundkursen där vi lät $X_1, \dots, X_n$ beteckna ett stickprov bestående av oberoende och likafördelade stokastiska variabler och skrev $x_1, \dots, x_n$ när vi räknade med observerade data.

Kap 4.1 Grundläggande begrepp och definitioner

Definition 4.1 En stokastisk process $Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ med diskret tillståndsrums E sägs vara en *Markovprocess*, om

$$\Pr\{Y_{t+s} = j | Y_u = y_u, u \leq t\} = \Pr\{Y_{t+s} = j | Y_t = y_t\}$$

Markovprocessen sägs ha *stationära transitioner*, om

$$\Pr\{Y_{t+s} = j | Y_t = i\} = \Pr\{Y_s = j | Y_0 = i\}$$

Då transitionerna är stationära kallas processen *homogen*.

I princip är samtliga Markovprocesser vi kommer att studera uppbyggda som den i

Exempel Gå igenom hur man simulerar en Markovprocess med tillståndsrums $E = \{A, B, C\}$ och med uppehållsintensiteter OH 12

$$\lambda(A) = 2/7, \quad \lambda(B) = 1/7, \quad \lambda(C) = 3/14$$

samt Markovmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Jag utgick ifrån att processen startar i A , d v s att $Y_0 = A$, vid tidpunkten $t_0 = 0$. Den första uppehållstiden har därför fördelningen $\text{Exp}(1/\lambda(A)) = \text{Exp}(7/2)$. Jag drog

slumptalet $u_1 = 0.5081$ och erhöll därför observationen $s_1 = -(7/2) \ln u_1 = 2.37$. Vid tidpunkten $t_1 = t_0 + s_1 = 2.37$ byter alltså processen tillstånd första gången.

För att få reda på vart processen hoppade, simulerade jag en observation ifrån fördelningen $[0 \ 0.5 \ 0.5]$ (raden svarande mot tillståndet A i $\mathbf{P}$). Jag drog slumptalet $u_2 = 0.7931$ och erhöll därför $x_1 = C$. Nästa uppehållstid har därför fördelningen $\text{Exp}(1/\lambda(C)) = \text{Exp}(14/3)$ och jag drog $u_3 = 0.3157$ och erhöll därför observationen $s_2 = -(14/3) \ln 0.3157 = 5.38$. Så vid tidpunkten $t_2 = t_1 + s_2 = 2.37 + 5.38 = 7.75$ byter processen tillstånd andra gången.

För att se vilket tillstånd processen övergick i simulerade jag en observation ifrån fördelningen $[0.75 \ 0.25 \ 0]$. Jag drog $u_4 = 0.9217$ och erhöll därför $x_2 = B$. Därför är nästa uppehållstid $\text{Exp}(1/\lambda(B)) = \text{Exp}(7)$ -fördelad. Jag simulerade fram observationen $s_3 = -7 \ln u_5 = -7 \ln 0.6277 = 3.26$ av denna. Så tredje gången processen hoppar är vid tidpunkten $t_3 = t_2 + s_3 = 7.75 + 3.26 = 11.01$ och genom att simulera en observation från fördelningen på den andra raden i $\mathbf{P}$ fick jag reda på att det nya tillståndet var $x_3 = A$ (ty jag drog $u_6 = 0.3374$). Och så vidare.

Den här beskrivningen av hur en Markovprocess fungerar är väsentligen innehållet i definition 4.2 (som egentligen borde vara en sats). Jag formulerar denna något mer konstruktivt nedan.

Sats (Jämför med definition 4.2) Låt $\mathbf{P}$ vara en Markovmatris, sådan att $P(j, j) = 0$ för varje tillstånd j . Låt vidare $\lambda(j) > 0$ vara *uppehållsintensiteten* i tillstånd j (kallas också intensiteten för hopp ut ur j). Antag att $x_0, x_1, x_2, \dots$ är en realisering av en Markovkedja $X_0, X_1, \dots$ med transitionsmatris $\mathbf{P}$. Låt $s_1, s_2, \dots$ vara oberoende observationer av $S_1, S_2, \dots$, där S_n är Exponentialfördelad med väntevärde $1/\lambda(x_{n-1})$. Låt $t_0 = 0$ och definiera rekursivt $t_{n+1} = t_n + s_{n+1}$ för $n = 1, 2, \dots$. Om

$$y_t = \begin{cases} x_0 & \text{då } t_0 \leq t < t_1 \\ x_1 & \text{då } t_1 \leq t < t_2 \\ x_2 & \text{då } t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

så är $\{y_t; t \geq 0\}$ en realisering av en Markovprocess $\{Y_t; t \geq 0\}$, vars fördelning är definierad av Markovmatrisen $\mathbf{P}$ och uppehållsintensiteterna $\lambda(j)$.

Markovkedja $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ kallas ofta den *inbäddade* Markovkedjan. Observera att denna kedja talar bara om vilka tillstånd Markovprocessen besöker.

Observera att $\{y_t; t \geq 0\}$ är en högerkontinuerlig funktion.

Exempel 4.1 och 4.2

OH 13a

Definition 4.3 Tillstånd klassificeras enligt vad som gäller för den inbäddade Markovkedjan.

Så att om tillståndsrummet E är irreducibelt, så säger vi att Markovprocessen är *irreducibel*.

Kap 4.2 Fortvarighetssannolikheter

(”Steady-state probabilities” på engelska.)

Antag att tillståndsrummet E är irreducibelt. Den inbäddade Markovkedjan har då en invariant fördelning π som fås genom att lösa ekvationen $\pi \mathbf{P} = \pi$. Även Markovprocessen kommer att ha väldefinierade fortvarighetssannolikheter, som ej beror av hur processen initierades, OH 11a

$$p(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{Y_t = j | Y_0 = i\}$$

Heuristiskt är processen så här ofta i tillståndet j : $\pi(j)$.

Varje gång den är i j är den där i snitt så här länge: $1/\lambda(j)$.

Ur detta följer

$$p(j) \propto \frac{\pi(j)}{\lambda(j)}$$

Vi har alltså,

$$p(j) = \frac{\pi(j)/\lambda(j)}{\sum_{k \in E} \pi(k)/\lambda(k)}$$

Exempel 4.2 Beräkna $\mathbf{p}$.

OH 13a

Definition 4.4 Processens generator $\mathbf{G}$ är den matris som på rad i , kolumn j har elementet OH 11

$$G(i, j) = \begin{cases} -\lambda(i) & \text{då } j = i \\ \lambda(i)P(i, j) & \text{då } j \neq i \end{cases}$$

Observera att $\lambda(i) = -G(i, i)$ är intensiteten för hopp ut ur i , medan $G(i, j)$ för $i \neq j$ är intensiteten för hopp till j , samt

$$P(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{då } j = i \\ G(i, j)/\lambda(i) & \text{då } j \neq i \end{cases}$$

Exempel 4.3 Beräkna $\mathbf{G}$. Rita tillståndsdigram.

OH 13a

Exempel (sida 105) Om $E = \{a, b, c\}$ och

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

så är

$$\lambda(a) = 2, \quad \lambda(b) = 4, \quad \lambda(c) = 5$$

och

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats 4.5 För en irreducibel och ”rekurrent” Markovprocess med generator $\mathbf{G}$ gäller att

$$\mathbf{p}\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

Att processen är rekurrent betyder att alla tillstånd är sådana att processen garanterat kommer tillbaka till det givet att den en gång varit där. Om tillståndsrummet är ändligt är detta självklart. Om tillståndsrummet är oändligt, följer detta om det finns en lösning $\mathbf{p}$ till ekvationen $\mathbf{p}\mathbf{G} = \mathbf{0}$, sådan att $\mathbf{p}\mathbf{1} = 1$ (här, och fortsättningsvis, betyder $\mathbf{1}$ en kolumnvektor med bara ettor).

Ett viktigt exempel på en icke-rekurrent irreducibel Markovprocess är Poissonprocessen. Den har tillståndsrummet $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ och generatoren

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Jobba själva igenom det viktiga exempel 4.4. I samband med exemplet, försök visa att om S_1, S_2 är oberoende Exp-variabler med väntevärden $\beta_1 = 1/\lambda_1$ resp $\beta_2 = 1/\lambda_2$, så är $S = \min(S_1, S_2)$ Exp-fördelad med väntevärde $\beta = 1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. (Ledning: argumentera med fördelningsfunktionerna eller ett minus dem. Observera att $S > t$ om, och endast om, $S_1 > t, S_2 > t$.)

Exempel 4.5 handlar om hur man simulerar Poissonprocessen. Det har vi redan gått igenom. Men exemplet innehåller lite mer, så jobba igenom det också.

Kap 4.3 Beräkning av genomsnittliga intäkter och kostnader

F08a

Repetera. genom att gå igenom exempel 4.1, 4.2, 4.3 en gång till

OH 13a

Sats 4.6 och 4.7 Antag att tillståndsrummet är irreducibelt och recurrent. Låt f vara en funktion (”profit rate function”) som anger kostnaden per tidsenhet i de olika tillstånden och låt $\mathbf{f}$ vara motsvarande kolumnvektor (”profit rate vector”). Låt $\mathbf{h}$ vara den matris som på rad i , kolumn j innehåller kostnaden för en transition ifrån i till j . (Observera att $h(i, i) = 0$.) Låt $\mathbf{p}$ vara radvektorn innehållande processens fortvarighetssannolikheter och låt $\mathbf{G}$ vara processens generator. Då gäller, oberoende av hur processen initieras,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[\frac{1}{t} \int_0^t f(Y_s) ds \right] = \mathbf{p}\mathbf{f}$$

och

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[\sum_{s \leq t} h(Y_{s-}, Y_s) \right] = \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}$$

Summan $\mathbf{p}\mathbf{f} + \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}$ anger alltså processens genomsnittliga kostnad per tidsenhet då den är i jämnvikt.

Kommentar: $\otimes$ betyder här punktvis multiplikation och $\mathbf{1}$ betecknar en kolumnvektor bestående av bara ettor. Således gäller att

$$(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})(i, j) = G(i, j)h(i, j)$$

samt att

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

vilket ger att

$$(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}(i) = \sum_j G(i, j)h(i, j)$$

samt att

$$\mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \sum_i p(i) \sum_j G(i, j)h(i, j)$$

Exempel 4.6

OH 13b

Sats 4.8 Med samma förutsättningar som i satserna 4.6 och 4.7 ovan, gäller

$$E \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(Y_s) ds | Y_0 = i \right] = (\beta \mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{f}(i)$$

Härur följer att om processens initialfördelning är $\mathbf{q}$ (d.v.s $\Pr\{Y_0 = i\} = q(i)$), så

$$E \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(Y_s) ds \right] = \mathbf{q}(\beta \mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{f}$$

J.f.r med motsvarande resultat för Markovkedjor.

Sist i kapitel 2 om Markovkedjor i diskret tid införde vi en diskonteringsfaktor α . I exempel 2.21 översätter man "the monetary rate of return be 20% per period" till $\alpha = 1/(1 + 0.2) = 5/6$. I exempel 4.7, som vi strax ska titta på, översätter man "discount rate of 5%" till $\beta = 0.05 = 1/20$. Så β är lika med räntesatsen och α är lika med 1 genom 1 plus räntesatsen. M.a.o,

$$\alpha(1 + \beta) = 1$$

Ett annat sätt att jämföra α och β är att om $\alpha^n = e^{-\beta n}$ för alla n , så måste vi ha $\alpha = e^{-\beta}$ eller

$$\alpha e^\beta = 1$$

För små β gäller med bra noggrannhet $e^\beta = 1 + \beta$. Använder vi oss av detta samband, så leder båda jämförelserna till samma slutresultat.

Exempel 4.7

OH 13c

Kap 4.4 ingår ej.