Generiskt exempel

$\{Y_t, t \geq 0\}$ Markovprocess

Tillståndsrum är $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$

$Y_t = j$ innebär att tillståndet är j vid tidpunkten t

Givet är

1) en transitionsmatris $\mathbf{P}$, sådan att
   $P(i,i) = 0$ för alla $i \in E$

2) uppehållsintensiteter $\lambda(i)$, $i \in E$

Tillståndsförändringar sker enligt $\mathbf{P}$

Uppehållstiderna är oberoende Exp-variabler
med väntevärde $1/\lambda(i)$

Stationära fördelningen $\mathbf{p}$ uppfyller

$$p(i) \propto \frac{\pi(i)}{\lambda(i)}$$

där π löser $\pi\mathbf{P} = \pi$

Elementen i generatorn $\mathbf{G}$ är

$$G(i,j) = \begin{cases} -\lambda(i) & \text{då } j = i \\ \lambda(i)P(i,j) & \text{då } j \neq i \end{cases}$$

Stationära fördelningen $\mathbf{p}$ löser $\mathbf{pG} = \mathbf{0}$

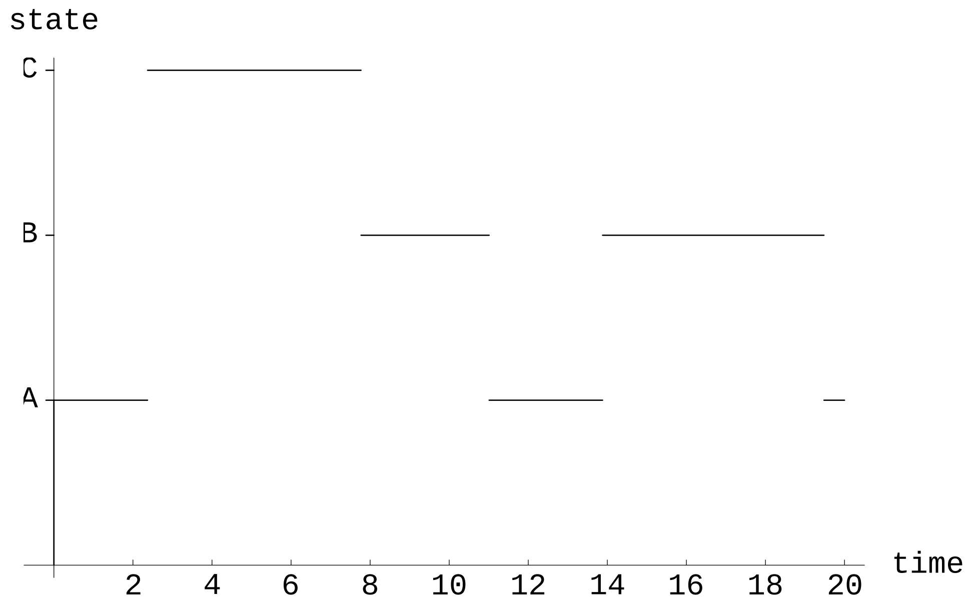
Observera att $\lambda(i) = -G(i,i)$ och

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{då } j = i \\ G(i,j)/\lambda(i) & \text{då } j \neq i \end{cases}$$

Observera också att

$\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(Y_s)\,ds\right] = \mathbf{pf}$

$\lim_{t\to\infty} E\left[\frac{1}{t}\sum_{s\leq t} h(Y_{s-}, Y_s)\right] = \mathbf{p}(\mathbf{G}\otimes\mathbf{h})\mathbf{1}$



En realisering av en Markovprocess under tidsrymden $[0, 20]$ med tillståndsrummet $E = \{A, B, C\}$ och med uppehållsintensiteter

$$\lambda(A) = 2/7, \;\; \lambda(B) = 1/7, \;\; \lambda(C) = 3/14$$

samt Markovmatris

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

n	t_n	x_n	u_{2n+1}	s_{n+1}	t_{n+1}	u_{2n+2}	x_{n+1}
0	0.00	A	0.5081	2.37	2.37	0.7931	C
1	2.37	C	0.3157	5.38	7.75	0.9217	B
2	7.75	B	0.6277	3.26	11.01	0.3374	A
3	11.01	A	0.4404	2.87	13.88	0.4712	B
4	13.88	B	0.4493	5.60	19.48	0.0658	A
5	19.48	A	0.1235	7.32	≥ 20		

Exempel 4.1 (s 101), 4.2 (s 102)

$$E = \{a, b, c\}$$

$$\lambda(a) = 1/2, \quad \lambda(b) = 1, \quad \lambda(c) = 2/3$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

s 103 (längst ned)

$$\pi\mathbf{P} = \pi \Rightarrow \pi = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} \propto \begin{bmatrix} \frac{3}{1/2} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2/3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p} = \tfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exempel 4.3 (s 104)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{pG} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \tfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exempel 4.6 (s 109-110)

$$\mathbf{f} = 5 \times \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 625 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} E\Big[\tfrac{1}{t}\int_0^t f(Y_s)\,ds\Big] = \mathbf{pf} \approx 479.5$$

$$\mathbf{h} = 0.25 \times \begin{bmatrix} 0 & 50 & 65 \\ 50 & 0 & 80 \\ 65 & 80 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12.50 & 16.25 \\ 12.5 & 0 & 20.00 \\ 16.25 & 20.00 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 3.125 & 4.0625 \\ 9.375 & 0 & 5 \\ 8.125 & 3.333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} \approx \begin{bmatrix} 7.19 \\ 14.38 \\ 11.46 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} E\big[\tfrac{1}{t}\sum_{s\le t} h(Y_{s-}, Y_s)\big] = \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} \approx 9.7$$

Genomsnittsvinsten blir alltså

$$\mathbf{pf} - \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = \mathbf{p}(\mathbf{f} - (\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1}) \approx 469.8$$

USD/vecka

Exempel 4.7 (s 110-111)

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 625 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \beta = 5\% = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \beta\mathbf{I} - \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{43}{60} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\beta\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} 11.31 & 3.51 & 5.17 \\ 10.54 & 4.28 & 5.17 \\ 10.34 & 3.45 & 6.21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\beta\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 9515 \\ 9592 \\ 9741 \end{bmatrix}$$