A/S/N/C/D

	Characteristics	Symbols	Explanation
A	Interarrival time distribution	M	Exponential (Markov)
		D	Deterministic
		E_k	Erlang type k
		G	General
S	Service time distribution	M	Exponential (Markov)
		D	Deterministic
		E_k	Erlang type k
		G	General
N	Number of servers	$1, 2, \ldots, \infty$	Parallel servers
C	System capacity	$1, 2, \ldots, \infty$	Maximum allowable in system
D	Queue discipline	FIFO	First in/first out
		LIFO	Last in/first out
		SIRO	Service in random order
		PRI	Priority
		GD	General discipline

Tabell 5.1. Queueing symbols

Exempel 5.2

M/M/1 med $\lambda = 1/2$, $\mu = 5/8$ per dag

$\rho = \lambda/\mu = 4/5$

$L = \rho/(1-\rho) = 4$ st

$W = L/\lambda = 8$ dagar

Betala c USD per dag och bil

$\Rightarrow f(i) = ci$

$E[C] = \mathbf{pf} = cL$ USD/dag

Tag betalt d USD per ankommande bil

$$\Rightarrow \mathbf{h} = d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$E[D] = \mathbf{p}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{h})\mathbf{1} = d\lambda$ USD/dag

Balans i inkomster/utgifter erhålles då

$cL = d\lambda \Leftrightarrow d = cW$

$c = 10$ USD per bil och dag ger

$E[C] = 40$ USD/dag

$d = 80$ USD/bil

Exempel 5.3

M/M/1/K med $\lambda = 3$, $\mu = 2$ per vecka, $K = 2$

$\rho = 3/2$

$$L = \frac{\rho[1 + K\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} = 1.263$$

$$p_K = 1 - \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = 0.4737$$

En kund i systemet kostar $c = 100$ USD/vecka

Varje missad kund kostar $d = 500$ USD

$E[C] = cL + d\lambda p_K = 836.84$ USD/vecka

Man funderar på att öka kapaciteten K.

Kommer detta att bli lönsamt?

K	L	p_K	$E[C]$	
2	1.263	0.4737	836.84	
3	1.985	0.4154	821.54	$\leftarrow$
4	2.758	0.3839	851.66	

Snittkostnaden $E[C]$ minimeras alltså då $K = 3$

Exempel 5.4

M/M/c/K med $\lambda = 3$, $\mu = 2$ per vecka, $c = 1$, $K = 3$

En kund i systemet kostar 100 USD/vecka

Varje missad kund kostar 500 USD

Snittkostnaden är 821.54 USD/vecka

Det kostar 400 USD att lägga till en betjäningsstation, så att $c = 2$. Är detta lönsamt?

Födelseintensiteter $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$ st/vecka

Dödsintensiteter $\mu_1 = \mu = 2$, $\mu_2 = \mu_3 = 2\mu = 4$ st/vecka

Balansekvationerna är

$$p_1 = \frac{3}{2} p_0, \quad p_2 = \frac{9}{8} p_0, \quad p_3 = \frac{27}{32} p_0$$

Så

$$1/p_0 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} = \frac{143}{32} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{32}{143} \approx 0.2238$$

Härur följer

$$L = E[N] = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = \frac{201}{143} \approx 1.406$$

Genomsnittskostnaden blir

$$E[C] = 100L + 500\lambda p_K + 400 \approx 823.78 > 821.54$$

USD/vecka. Vi ser att det är ej lönsamt att lägga till en betjäningsstation.

N_t är antalet maskiner av 3, som är ur drift vid tidpunkten $t \geq 0$. ”Födelse” betyder att en maskin går sönder. För varje maskin sker detta med intensiteten $\lambda = 1$ st/vecka. ”Död” betyder att en maskin är färdigreparerad. Mekanikern klarar i snitt att reparera $\mu = 2$ st/vecka.

Födelseintensiteter är $\lambda_n = (3-n)\lambda$ för $n = 0, 1, 2$

Dödsintensiteter är $\mu_n = \mu$ för $n = 1, 2, 3$

Födelse- och dödsekvationerna ger

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{3}{2} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} p_0 = \frac{3}{2} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} p_0 = \frac{3}{4} p_0$$

Så

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{19}$$

Alltså,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

och

$$L = \sum_{n=0}^{3} n p_n = \frac{1}{19}(6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3) = \frac{27}{19} \approx 1.421$$